FICHE DE RÉVISIONS N°2

CALCULS ALGÉBRIQUES

Dans ce document, on rappelle quelques « règles de calculs » dans l'ensemble des nombres réels :

1. développements et factorisations;
2. identités remarquables;
3. parenthésage et substitution dans une formule;
4. propriétés de la notation puissance

et on propose des exercices d'applications.

Pour étudier ce texte, vous suivrez strictement la consigne suivante qui figure en en-tête de sujets de compositions écrites de Mathématiques de concours aux Grandes Écoles.

Les calculatrices sont interdites.

Il faut donc effectuer tous les calculs demandés sans l'aide de machine.

Les exercices proposés comportent des indications et des corrigés détaillés. Les portions de texte **ÉNONCÉ**, **INDICATION(S)** et **UN CORRIGÉ** sont cliquables, afin de naviguer aisément dans le document lors de l'étude d'un exercice.

Les références F2.?. à des énoncés de cette fiche sont également cliquables.

F2.1. NOTATIONS

- Le symbole $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels.
- Le symbole $\mathbb{R}^*$ désigne l'ensemble des nombres réels non nuls, i.e. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

F2.2. CONVENTION La multiplication $a \times b$ de deux nombres réels a et b sera parfois simplement notée $a\,b$.

F2.3. DISTRIBUTIVITÉ DE L'ADDITION PAR RAPPORT À LA MULTIPLICATION Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{(a+b)\,c = a\,c + b\,c \qquad \text{et} \qquad a\,(b+c) = a\,b + a\,c.}$$

En lisant ces identités de la gauche vers la droite, nous obtenons des formules de développement. Si, au contraire, nous les lisons de la droite vers la gauche, elles livrent des formules de factorisation.

F2.4. IDENTITÉS REMARQUABLES De F2.3, nous déduisons les quatre identités remarquables suivantes.

1. *Carré d'une somme* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2}$$

2. *Carré d'une différence* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2}$$

3. *Différence de deux carrés* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a+b)\,(a-b)}$$

4. *Cube d'une somme* Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $b \in \mathbb{R}$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3}$$

Les formules 1. et 4. sont des cas particuliers de la formule du binôme de Newton, rencontrée en option Mathématiques Expertes et figurant au programme de la classe de MP2I.

F2.5. Parenthésage et substitution dans une formule La règle suivante est élémentaire mais essentielle.

> Dans une formule, si nous remplaçons un symbole par plusieurs symboles, alors nous entourons toujours ces nouveaux symboles de parenthèses.

F2.6. Exemple de substitution Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. La deuxième de F2.4 se déduit de la première, en remplaçant b (un symbole) par $-b$ (deux symboles). Ainsi, d'après :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$$

il vient :

$$(a+(-b))^2 = a^2 + 2\,a\,(-b) + (-b)^2$$

qui se réécrit :

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2\,.$$

F2.7. Exercice ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$:

$$f(x) = \frac{3x+2}{1-x}$$

et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$:

$$g(x) = \frac{x-2}{x+3}\,.$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
   (a) Justifier que $g(x) \neq 1$.
   (b) Simplifier $f(g(x))$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   (a) Justifier que $f(x) \neq -3$.
   (b) Simplifier $g(f(x))$.

F2.8. Exercice ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit x un nombre réel. Développer, réduire et ordonner l'expression :

$$\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right).$$

Les fractions apparaissant dans le résultat final seront écrites sous forme irréductible.

F2.9. Exercice ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit x un nombre réel différent de 0 et 2. Simplifier l'expression :

$$\frac{(x+1)^2-(1-2x)^2}{(1-x)^2-1}\,.$$

F2.10. Exercice ★★☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{7}{4}\right\}$. Déterminer des constantes réelles indépendantes de x, notées $\blacksquare$, non nécessairement égales, telles que :

$$\frac{x-3}{4x-7} = \blacksquare + \blacksquare \times \frac{4}{4x-7}\,.$$

F2.11. Exercice ★★☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Comparer les deux nombres suivants.

$$A = \sqrt{7} - \sqrt{3} \qquad ; \qquad B = \frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$$

F2.12. NOTATION PUISSANCE Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$x^n = \begin{cases} 1 & \text{si } a = 0 \\ \underbrace{x \times x \times \ldots \times x}_{a \text{ fois}} & \text{si } a > 0 \\ \underbrace{\frac{1}{x} \times \frac{1}{x} \times \ldots \times \frac{1}{x}}_{-a \text{ fois}} & \text{si } a < 0. \end{cases}$$

F2.13. PROPRIÉTÉS DE LA NOTATION PUISSANCE La notation puissance possède les propriétés suivantes, qui s'établissent en raisonnant par disjonction de cas, suivant les signes des exposants.

1. *Inverse d'une puissance* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$:
$$\boxed{\frac{1}{x^a} = x^{-a}}$$
2. *Puissance d'une puissance* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, pour tout $b \in \mathbb{Z}$:
$$\boxed{(x^a)^b = x^{ab}}$$
3. *Produit de deux puissances d'un même nombre* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, pour tout $b \in \mathbb{Z}$:
$$\boxed{x^a\, x^b = x^{a+b}}$$
4. *Quotient de deux puissances d'un même nombre* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, pour tout $b \in \mathbb{Z}$:
$$\boxed{\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} = \frac{1}{x^{b-a}}}$$
5. *Puissance d'un produit* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$:
$$\boxed{(xy)^a = x^a\, y^a}$$
6. *Puissance d'un quotient* Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, pour tout $a \in \mathbb{Z}$:
$$\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}}$$

F2.14. EXERCICE ★☆☆☆☆ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ**

1. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Simplifier l'expression suivante.
$$\frac{\left(2\,x^7\right)\left(5\,x^{11}\right)}{\left(10\,x^9\right)^3}$$
2. Soient a, b, c trois nombres réels non nuls. Simplifier l'expression suivante.
$$\frac{\dfrac{2\,a^6\,b^5\,\left(c^{-1}\right)^4}{a^{-4}\,b^7\,c^2}}{\dfrac{7\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^2}{b^2\,c^5}}$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F2.7. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. (a) Raisonner par l'absurde, en supposant donc que $g(x) = 1$.

   (b) Poursuivre le calcul débuté ci-dessous.

$$f(g(x)) \quad = \quad f\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = \frac{3\,\dfrac{x-2}{x+3}+2}{1-\dfrac{x-2}{x+3}} = \dots$$

2. (a) Raisonner par l'absurde, en supposant donc que $f(x) = -3$.

   (b) Poursuivre le calcul débuté ci-dessous.

$$g(f(x)) \quad = \quad g\left(\frac{3x+2}{1-x}\right) = \frac{\dfrac{3x+2}{1-x}-2}{\dfrac{3x+2}{1-x}+3} = \dots$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F2.8. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

- Commencer par appliquer la propriété de distributivité de l'addition par rapport à la multiplication pour obtenir :

$$\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) \quad = \quad x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x^2}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right).$$

- Poursuivre le développement en déterminant des constantes réelles indépendantes de x, notées $\blacksquare$, non nécessairement égales, telles que :

$$\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)=\blacksquare\, x^6+\blacksquare\, x^5+\blacksquare\, x^4+\blacksquare\, x^3+\blacksquare\, x^2+\blacksquare\, x\,.$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F2.9. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

- Poser $N(x) = (x+1)^2 - (1-2x)^2$ et $D(x) = (1-x)^2 - 1$.
- Justifier tout d'abord que $D(x)$ est non nul, pour être assuré que l'expression à simplifier est bien définie.
- Appliquer une identité remarquable pour factoriser $N(x)$, puis appliquer une autre identité remarquable pour développer $D(x)$.
- Une autre stratégie gagnante, mais moins efficace, consiste à développer $N(x)$ et $D(x)$ au moyen d'identités remarquables.

Indication(s) pour l'exercice F2.10. Énoncé Un corrigé

Poursuivre le calcul débuté ci-dessous.

$$\frac{x-3}{4x-7} = \frac{1}{4}\,\frac{4x-12}{4x-7} = \frac{1}{4}\,\frac{4x-7-5}{4x-7} = \ldots$$

INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F2.11. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

En multipliant A « haut et bas » par le nombre $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, appelé conjugué de $\sqrt{7}-\sqrt{3}$, nous obtenons :

$$A=\sqrt{7}-\sqrt{3}=\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}.$$

Poursuivre le calcul en appliquant une identité remarquable.

Indication(s) pour l'exercice F2.14. Énoncé Un corrigé

1. - En utilisant F2.13, écrivez $N(x) = \left(2\,x^7\right)\left(5\,x^{11}\right)$ sous la forme :

$$(\star) \qquad N(x) = \blacksquare\, x^{\blacksquare}$$

   et $D(x) = \left(10\,x^9\right)^3$ sous la forme :

$$(\star\star) \qquad D(x) = \blacksquare\, x^{\blacksquare}$$

   où $\blacksquare$ désigne des constantes réelles indépendantes de x, non nécessairement égales.
   - Simplifiez alors $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ à l'aide de $(\star)$, $(\star\star)$ et de F2.13. On pourra exprimer le résultat sous la forme :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{1}{\blacksquare\, x^{\blacksquare}}.$$

2. - Soient $N(a,b,c) = \dfrac{2\,a^6\,b^5\,\left(c^{-1}\right)^4}{a^{-4}\,b^7\,c^2}$ et $D(a,b,c) = \dfrac{7\,\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^2}{b^2\,c^5}$ de sorte que :

$$\frac{\dfrac{2\,a^6\,b^5\,\left(c^{-1}\right)^4}{a^{-4}\,b^7\,c^2}}{\dfrac{7\,\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^2}{b^2\,c^5}} = \frac{N(a,b,c)}{D(a,b,c)}.$$

   - En utilisant F2.13, écrivez $2\,a^6\,b^5\,\left(c^{-1}\right)^4$ sous la forme :

$$2\,a^6\,b^5\,\left(c^{-1}\right)^4 = \blacksquare\, a^{\blacksquare}\, b^{\blacksquare}\, c^{\blacksquare}$$

   et et déduisez-en une expression de $N(a,b,c)$ sous la forme :

$$(\star) \qquad N(a,b,c) = \blacksquare\, a^{\blacksquare}\, b^{\blacksquare}\, c^{\blacksquare}$$

   où $\blacksquare$ désigne des constantes réelles indépendantes de x, non nécessairement égales.
   - En utilisant F2.13, écrivez $7\,\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^2$ sous la forme :

$$7\,\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^2 = \blacksquare\, a^{\blacksquare}\, b^{\blacksquare}\, c^{\blacksquare}$$

   et et déduisez-en une expression de $D(a,b,c)$ sous la forme :

$$(\star\star) \qquad D(a,b,c) = \blacksquare\, a^{\blacksquare}\, b^{\blacksquare}\, c^{\blacksquare}.$$

   - Simplifiez alors $\dfrac{N(a,b,c)}{D(a,b,c)}$ à l'aide de $(\star)$, $(\star\star)$ et de F2.13. On pourra exprimer le résultat sous la forme :

$$\frac{N(a,b,c)}{D(a,b,c)} = \blacksquare\, a^{\blacksquare}\, b^{\blacksquare}\, c^{\blacksquare}.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F2.7. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. (a) Nous raisonnons par l'absurde. Supposons donc $g(x) = \dfrac{x-2}{x+3} = 1$. Nous en déduisons $x-2 = x+3$ puis $-2 = 3$, ce qui n'est pas.

   (b) Nous calculons :

$$f(g(x)) \quad = \quad f\left(\frac{x-2}{x+3}\right) = \frac{3\,\dfrac{x-2}{x+3}+2}{1-\dfrac{x-2}{x+3}} = \frac{\dfrac{3\,(x-2)+2\,(x+3)}{x+3}}{\dfrac{(x+3)-(x-2)}{x+3}} = \frac{\dfrac{5x}{x+3}}{\dfrac{5}{x+3}} = \frac{5x}{x+3} \times \frac{x+3}{5} = x\,.$$

2. (a) Nous raisonnons par l'absurde. Supposons donc $f(x) = \dfrac{3x+2}{1-x} = -3$. Nous en déduisons $3x+2 = -3+3x$ puis $2 = -3$, ce qui n'est pas.

   (b) Nous calculons :

$$g(f(x)) \quad = \quad g\left(\frac{3x+2}{1-x}\right) = \frac{\dfrac{3x+2}{1-x}-2}{\dfrac{3x+2}{1-x}+3} = \frac{\dfrac{(3x+2)-2(1-x)}{1-x}}{\dfrac{(3x+2)+3(1-x)}{1-x}} = \frac{\dfrac{5x}{1-x}}{\dfrac{5}{1-x}} = \frac{5x}{1-x} \times \frac{1-x}{5} = x\,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F2.8. ÉNONCÉ INDICATION(S)

Nous commençons par appliquer la propriété de distributivité de l'addition par rapport à la multiplication.

$$\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) \quad = \quad x\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)-\frac{x^2}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)+\frac{x^3}{3}\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right)$$

Nous allons maintenant développer les termes restants et regrouper les regrouper suivant leurs degrés, en une seule étape.

$$\begin{aligned}\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}\right) &= \left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}\right)x^6+\left(-\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)x^5+\left(1\times\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times 1\right)x^4\\ &+ \left(1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{3}\times 1\right)x^3+\left(1\times 1-\frac{1}{2}\times 1\right)x^2+x\\ &= \frac{x^6}{18}+\frac{x^5}{12}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\end{aligned}$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F2.9. ÉNONCÉ INDICATION(S)

- Posons $N(x) = (x+1)^2 - (1-2x)^2$ et $D(x) = (1-x)^2 - 1$.
- Remarquons que $D(x) = 0$ si et seulement si $(1-x)^2 = 1$, i.e. si et seulement si $1-x = 1$ ou $1-x = -1$. Comme $x \neq 0$ et $x \neq 2$, $D(x)$ n'est jamais nul et donc l'expression $\dfrac{N(x)}{D(x)}$ à simplifier est bien définie.
- $N(x)$ est la différence de deux carrés. Nous pouvons donc appliquer une identité remarquable pour factoriser $N(x)$.

$$(\star) \qquad N(x) = (\underbrace{x+1}_{a})^2 - (\underbrace{1-2x}_{b})^2 = ((x+1)+(1-2x))\,((x+1)-(1-2x)) = (-x+2)\,(3x) = 3\,x\,(-x+2)$$

- Nous appliquons une identité remarquable pour développer $D(x)$.

$$(\star\star) \qquad D(x) = (\underbrace{1}_{a} - \underbrace{x}_{b})^2 - 1 = 1 - 2x + x^2 - 1 = x\,(x-2)$$

- De $(\star)$, $(\star\star)$ et $-x+2 = -(x-2)$, nous déduisons :

$$\frac{N(x)}{D(x)} = \frac{3\,x\,(-x+2)}{x\,(x-2)} = -3\,.$$

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F2.10. ÉNONCÉ INDICATION(S)

Nous calculons :

$$\frac{x-3}{4x-7} = \frac{1}{4}\,\frac{4x-12}{4x-7} = \frac{1}{4}\,\frac{4x-7-5}{4x-7} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{5}{4x-7}\right) = \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\,\frac{1}{4x-7} = \frac{1}{4} - \frac{5}{16}\,\frac{4}{4x-7}\,.$$

La dernière expression a bien la forme demandée.

Analyse de cette solution

La transformation réalisée dans cet exercice est utile pour calculer une primitive de la fonction :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \left]\frac{7}{4},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x-3}{4x-7} \end{array} \right. .$$

Grâce à notre calcul, nous observons que la fonction :

$$F \left| \begin{array}{ccc} \left]\frac{7}{4},+\infty\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{4} - \dfrac{5}{16}\ln(4x-7) \end{array} \right.$$

est une primitive de la fonction f.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F2.11. ÉNONCÉ INDICATION(S)

En multipliant A « haut et bas » par le nombre $\sqrt{7}+\sqrt{3}$, appelée conjugué de A, nous obtenons :

$$A = \sqrt{7}-\sqrt{3} = \left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{7}+\sqrt{3}\,.}$$

Nous reconnaissons une identité remarquable au numérateur de la dernière fraction.

$$A = \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}^2-\sqrt{3}^2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{7-3}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = B$$

Analyse de cette solution

- Nous avons rencontré ici une notion de conjugué pour des nombres radiciels. Dans le chapitre de MP2I sur les nombres complexes, nous en étudierons une autre, présente dans le programme de Mathématiques Expertes.
- Observons bien que deux nombres qui s'écrivent différemment, tels $\sqrt{7}-\sqrt{3}$ et $\dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$, peuvent être égaux.

UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F2.14. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. Nous appliquons les propriétés rappelées en F2.13.

$$\frac{\left(2\,x^{7}\right)\left(5\,x^{11}\right)}{\left(10\,x^{9}\right)^{3}} = \frac{10\,x^{7+11}}{10^{3}\,x^{9\times 3}} = \frac{x^{18}}{10^{2}\,x^{27}} = \frac{1}{100\,x^{27-18}} = \frac{1}{100\,x^{9}}$$

2. • Posons $N(a,b,c) = \dfrac{2\,a^{6}\,b^{5}\left(c^{-1}\right)^{4}}{a^{-4}\,b^{7}\,c^{2}}$ et $D(a,b,c) = \dfrac{7\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^{2}}{b^{2}\,c^{5}}$ de sorte que :

$$\frac{\dfrac{2\,a^{6}\,b^{5}\left(c^{-1}\right)^{4}}{a^{-4}\,b^{7}\,c^{2}}}{\dfrac{7\left(a^{-3}\,b^{-8}\,c\right)^{2}}{b^{2}\,c^{5}}} = \frac{N(a,b,c)}{D(a,b,c)}\,.$$

   • Nous simplifions d'abord $N(a,b,c)$:

$$(\star)\qquad N(a,b,c) = \frac{2\,a^{6}\,b^{5}\,c^{-1\times 4}}{a^{-4}\,b^{7}\,c^{2}} = 2\,a^{6-(-4)}\,b^{5-7}\,c^{-4-2} = 2\,a^{10}\,b^{-2}\,c^{-6}$$

   puis $D(a,b,c)$:

$$(\star\star)\qquad D(a,b,c) = \frac{7\,a^{-3\times 2}\,b^{-8\times 2}\,c^{2}}{b^{2}\,c^{5}} = 7\,a^{-6}\,b^{-16-2}\,c^{2-5} = 7\,a^{-6}\,b^{-18}\,c^{-3}$$

   à l'aide des propriétés F2.13.

   • De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons :

$$\frac{N(a,b,c)}{D(a,b,c)} = \frac{2\,a^{10}\,b^{-2}\,c^{-6}}{7\,a^{-6}\,b^{-18}\,c^{-3}} = \frac{2}{7}\,a^{10-(-6)}\,b^{-2-(-18)}\,c^{-6-(-3)} = \frac{2}{7}\,a^{16}\,b^{16}\,c^{-3}\,.$$