# Fiche de révisions n°1

# Nombres rationnels

Ce texte traite des thèmes suivants.

1. Fractions irréductibles
2. Opérations sur les fractions
3. Factorielle d'un entier naturel
4. Coefficients binomiaux

Pour étudier ce document, vous suivrez strictement les deux consignes suivantes, qui figurent en en-tête de sujets de compositions écrites de Mathématiques de concours aux Grandes Écoles.

(a) *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

(b) *Les calculatrices sont interdites.*

Pour respecter la consigne (a), vous structurerez toutes nos démonstrations et justifierez avec soin toutes nos assertions. Quant à l'injonction (b), elle est claire : il faut effectuer tous les calculs demandés sans l'aide de machine.

Les exercices proposés comportent des indications et des corrigés détaillés. Les portions de texte **Énoncé**, **Indication(s)** et **Un corrigé** sont cliquables, afin de naviguer aisément dans le document lors de l'étude d'un exercice.

Les références F1.?. à des énoncés de cette fiche sont également cliquables.

## § 1 Forme irréductible d'une fraction

**F1.1. Notations** Nous rappelons quelques notations usuelles d'ensembles de nombres entiers.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels ;
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ l'ensemble des entiers naturels non nuls ;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs ;
- $\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ l'ensemble des entiers relatifs non nuls.

**F1.2. Définition (diviseur et multiple d'un entier relatif)** Soient $n \in \mathbb{Z}$.

1. Un entier relatif $d$ est appelé diviseur de $n$ s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = qd$.
2. Un entier relatif $m$ est appelé multiple de $n$ si $n$ est un diviseur de $m$.

**F1.3. Exemple (liste exhaustive des diviseurs positifs de 28)** Les diviseurs positifs de 28 sont 1, 2, 4, 7, 14, 28.

**F1.4. Exemple (quelques multiples de 7)** Les nombres -210, -42, 0, 21, 49, 70 et 112 sont des multiples de 7.

**F1.5. Définition (entiers relatifs premiers entre eux)** Soient $a$ et $b$ deux entiers relatifs, non tous les deux nuls. Les entiers $a$ et $b$ sont premiers entre eux si le seul diviseur positif commun à $a$ et $b$ est 1.

**F1.6. Exemple (nombres premiers entre eux)**

1. Les nombres $-123$ et 35 sont premiers entre eux. En effet, les diviseurs positifs de 35 sont 1,5,7,35 et 5,7,35 ne divisent pas -123.
2. Les nombres 85 et 289 ne sont pas premiers entre eux, puisque 17 les divise tous les deux.

**F1.7. Définition (fraction irréductible)** Soit $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}^*$. La fraction $\dfrac{n}{d}$ est dite irréductible si les entiers $n$ et $d$ sont premiers entre eux.

**F1.8. Exemple (fractions irréductibles)**

1. D'après F1.6, la fraction $\dfrac{-123}{35}$ est irréductible.

2. Toujours d'après F1.6, la fraction $\frac{85}{289}$ n'est pas irréductible. Comme $85 = 17 \times 5$ et $289 = 17 \times 17$, la fraction $\frac{85}{289}$ égale $\frac{5}{17}$. Comme 5 et 17 sont des nombres premiers distincts, ils sont premiers entre eux et donc la fraction $\frac{-5}{17}$ est irréductible.

**F1.9. EXERCICE** ★★☆☆☆ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ** Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}^*$. Démontrer que, si la fraction $\frac{n}{d}$ est irréductible, alors la fraction $\frac{d-n}{d}$ est également irréductible.

**F1.10. EXERCICE** ★★★☆☆ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ**

1. Soient $a$ et $b$ des nombres entiers relatifs, non tous les deux nuls. Démontrer que, s'il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $a \times u + b \times v = 1$, alors $a$ et $b$ sont premiers entre eux.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Démontrer que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible (Olympiades 1959).

## § 2 Opérations sur les fractions

**F1.11. RAPPELS SUR LES CALCULS DE FRACTIONS**

1. *Priorités de calcul* En l'absence de parenthèses, les multiplications et les divisions sont prioritaires sur les additions et les soustractions.
2. *Addition et soustraction de fractions au même dénominateur* Pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$, $n_2 \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}^*$ :
$$\boxed{\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{d} = \frac{n_1+n_2}{d} \quad \text{et} \quad \frac{n_1}{d} - \frac{n_2}{d} = \frac{n_1-n_2}{d}\ .}$$
3. *Signes pour une fraction* Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}^*$ :
$$\boxed{\frac{-n}{d} = \frac{n}{-d} = -\frac{n}{d} \quad \text{et} \quad \frac{n}{d} = \frac{-n}{-d}\ .}$$
4. *Produit de fractions* Pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$, $d_1 \in \mathbb{Z}^*$, $n_2 \in \mathbb{Z}$, $d_2 \in \mathbb{Z}^*$ :
$$\boxed{\frac{n_1}{d_1} \times \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1 \times n_2}{d_1 \times d_2}\ .}$$
5. *Simplification d'une fraction* Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{Z}^*$ :
$$\boxed{\frac{q \times n}{q \times d} = \frac{n}{d}\ .}$$
6. *Produit de fractions* Pour tout $n_1 \in \mathbb{Z}$, $d_1 \in \mathbb{Z}^*$, $n_2 \in \mathbb{Z}^*$, $d_2 \in \mathbb{Z}^*$ :
$$\boxed{\frac{n_1}{d_1} \div \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_1}{d_1} \times \frac{d_2}{n_2} = \frac{n_1 \times d_2}{d_1 \times n_2}\ .}$$

**F1.12. EXERCICE** ★☆☆☆☆ **INDICATION(S)** **UN CORRIGÉ** Calculer les expressions suivantes, en donnant les résultats sous forme de fraction irréductible.

(a) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)^2 \div \left(\frac{5}{9} - \frac{15}{18}\right)$ (b) $\frac{1}{15} - \frac{5}{42} - \frac{2}{105}$ (c) $\dfrac{-\frac{4}{39} + \frac{7}{26}}{-\frac{5}{22} + \frac{17}{132}}$

## § 3 Factorielle d'un entier naturel

**F1.13. Définition (factorielle d'un entier naturel)**

(a) Si $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la factorielle de $n$, notée $n!$, comme étant le produit de tous les entiers $k$ tels que $1 \leqslant k \leqslant n$, i.e. :

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n\,.$$

(b) La factorielle de 0 est par convention égale à 1, i.e. $0! = 1$.

**F1.14. Exemple (valeurs des premières factorielles)** Les valeurs des factorielles des nombres $0,1,2,3,4,5$ sont données ci-dessous.

$$0! = 1 \quad ; \quad 1! = 1 \quad ; \quad 2! = 1 \times 2 = 2 \quad ; \quad 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6 \quad ; \quad 4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24 \quad ; \quad 5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

**F1.15. Relation de récurrence pour les factorielles** Il découle de la définition même des factorielles F1.13 que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{n! = n \times (n-1)!}$$

**F1.16. Comportement asymptotique de la suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$** Nous observons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! \geqslant n$. Nous en déduisons que $n! \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. En cours de l'année de MP2I, nous démontrerons la formule de Stirling :

$$\frac{n!}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

qui nous livre une information sur la vitesse de divergence de $n!$ vers $+\infty$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$. On souligne que $\pi$ est le demi-périmètre du cercle unité et que $e$ est la valeur de la fonction exponentielle en 1.

**F1.17. Exercice** ★☆☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit un entier $n \geqslant 2$. Simplifier l'écriture de la fraction $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!}$, puis justifier que ce nombre est entier.

## § 4 Coefficients binomiaux

**F1.18. Définition (coefficients binomiaux)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Le coefficient binomial « $k$ parmi $n$ », noté $\dbinom{n}{k}$, est défini par :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!}\,.$$

**F1.19. Triangle de Pascal** Les coefficients binomiaux sont usuellement écrits dans un triangle, appelé triangle de Pascal, dont une portion figure ci-dessous.

$$\begin{array}{llllll}
\binom{0}{0}=1 & & & & & \\[2mm]
\binom{1}{0}=1 & \binom{1}{1}=1 & & & & \\[2mm]
\binom{2}{0}=1 & \binom{2}{1}=2 & \binom{2}{2}=1 & & & \\[2mm]
\binom{3}{0}=1 & \binom{3}{1}=3 & \binom{3}{2}=3 & \binom{3}{3}=1 & & \\[2mm]
\binom{4}{0}=1 & \binom{4}{1}=4 & \binom{4}{2}=6 & \binom{4}{3}=4 & \binom{4}{4}=1 & \\[2mm]
\binom{5}{0}=1 & \binom{5}{1}=5 & \binom{5}{2}=10 & \binom{5}{3}=10 & \binom{5}{4}=5 & \binom{5}{5}=1
\end{array}$$

**F1.20. Propriétés immédiates des coefficients binomiaux**

1. *Symétrie* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ :

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}\ .}$$

2. *Valeurs remarquables* Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n\ .}$$

Nous notons que ces propriétés se reflètent dans la portion de triangle de Pascal F1.19, ce qui explique la terminologie retenue.

- La propriété de symétrie indique qu'une ligne peut être indifféremment lue de gauche à droite ou de droite à gauche.
- La deuxième propriété nous livre les valeurs des débuts et fins de lignes du triangle de Pascal.

**F1.21. Une interprétation combinatoire des coefficients binomiaux** En Spécialité Mathématiques, nous avons vu que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$ :

$$\boxed{\binom{n}{k} \text{ est le nombre de parties à } k \text{ éléments d'un ensemble à } n \text{ éléments.}}$$

Nous reviendrons sur cette interprétation combinatoire en cours d'année de MP2I. Notons simplement qu'elle livre le caractère entier de tous les coefficients binomiaux, propriété qui n'est pas immédiate sur la définition F1.18 à l'aide de factorielles. Cf. exercice F1.17.

**F1.22. Exercice** ★★☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soient $n \geqslant 2$ un entier et $k$ un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Démontrer que la somme de coefficients binomiaux :

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

égale un coefficient binomial que l'on précisera.

**F1.23. Relation de Pascal** Le résultat établi dans l'exercice F1.22 précédent est appelé relation de Pascal. Cette identité est à savoir et peut être utilisée sans avoir à la redémontrer.

**F1.24. Exercice** ★★★★☆ **Indication(s)** **Un corrigé** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la somme :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-2} + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

qui est la somme des coefficients binomiaux présents sur la $(n+1)$-ième ligne du triangle de Pascal.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant k \leqslant n$. Justifier :
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

2. Démontrer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

**F1.25. Pour aller plus loin** Nous avons rappelé quelques propriétés du triangle de Pascal. Nous conseillons le visionnage la conférence (grand public) donnée par Christophe Soulé[1] sur cet objet mathématique très riche. Elle est accessible via le site de la Société Mathématique de France.

https://smf.emath.fr/smf-dossiers-et-ressources/soule-christophe-le-triangle-de-pascal-et-ses-proprietes-2008 .

1. Christophe Soulé est un mathématicien français, membre de l'Académie des Sciences et directeur de recherches à l'Institut des Hautes Études Scientifiques.

**F1.26. Exercice** ★★☆☆☆ **Indication(s)** **Un corrigé**

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Exprimer $k \times \binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $2 \leqslant k \leqslant n$. Exprimer $k \times (k-1) \times \binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-2}{k-2}$.

### Indication(s) pour l'exercice F1.9. Énoncé Un corrigé

- Supposons la fraction $\frac{n}{d}$ est irréductible. Que pouvons-nous alors dire des diviseurs positifs communs à $n$ et $d$ ?
- Nous voulons démontrer que la fraction $\frac{d-n}{d}$ est irréductible. Comment traduire cette propriété d'irréductibilité, en termes des diviseurs positifs communs à $d-n$ et $d$ ?
- Introduire avec soin un diviseur positif $a$ commun à $d-n$ et $d$ et démontrer que $a$ divise alors également $n$.
- Conclure à l'aide des trois points précédents.

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F1.10. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1.
   - Supposons qu'il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $a \times u + b \times v = 1$,
   - Nous voulons démontrer que $a$ et $b$ sont premiers entre eux. Comment traduire cette propriété en termes de diviseurs ?
   - Introduire avec soin un diviseur positif $d$ commun à $a$ et $b$, puis démontrer que $d$ divise alors également 1.
   - Combien le nombre 1 possède-t-il de diviseurs positifs ?
2.
   - Justifier tout d'abord que la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est bien définie.
   - Combiner les nombres $21n+4$ et $14n+3$ judicieusement pour obtenir le nombre 1, de manière à pouvoir appliquer le résultat de la question 1.

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F1.12. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

(a)
- Commencer par calculer $\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)^2$ en écrivant les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ avec le même dénominateur.
- Calculer ensuite $\frac{5}{9}-\frac{15}{18}$.
- Achever le calcul à l'aide des deux premiers points et des rappels F1.11.

(b) Commencer par écrire les trois fractions $\frac{1}{15}, \frac{5}{42}, \frac{2}{105}$ avec le même dénominateur. On pourra chercher un nouveau dénominateur plus petit que $15 \times 42 \times 105 = 66\,150$ pour ne pas avoir à considérer de « grands nombres ».

(c)
- Commencer par calculer $-\frac{4}{39}+\frac{7}{26}$ en écrivant les fractions $-\frac{4}{39}$ et $\frac{7}{26}$ avec le même dénominateur. On pourra chercher un nouveau dénominateur plus petit que $39 \times 26 = 1\,014$.
- Calculer ensuite $-\frac{5}{22}+\frac{17}{132}$ de manière analoque.
- Achever le calcul à l'aide des deux premiers points et des rappels F1.11.

### INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F1.17. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

- À l'aide de la relation de récurrence F1.15, exprimer $n!$ en fonction de $(n-2)!$.
- En déduire une simplification de $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!}$. On ne nous demande pas de forme irréductible ici.
- Pour établir le caractère entier de $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!}$, s'appuyer sur une propriété de parité que possèdent deux entiers consécutifs.

### Indication(s) pour l'exercice F1.22. Énoncé Un corrigé

- Exprimer tout d'abord les coefficients binomiaux $\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-1}{k}$ en termes de factorielles.
- Écrire ensuite les deux fractions qui sont apparues avec le même dénominateur, en réfléchissant bien au choix du nouveau dénominateur. Pour cela, on pourra remarquer que :

$$k \times (k-1)! \times (n-k)! = k! \times (n-k)! \qquad \text{et} \qquad (n-k) \times k! \times (n-1-k)! = k! \times (n-k)!\,.$$

## INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F1.24. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. - La relation de Pascal peut aussi s'écrire :

   $$\text{Pour tout entier } n' \geqslant 2, \text{ pour tout } k' \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leqslant k' \leqslant n'-1,\ \binom{n'-1}{k'-1} + \binom{n'-1}{k'} = \binom{n'}{k'}$$

   puisque les variables sont muettes.
   - Le résultat demandé peut être obtenu en appliquant la relation de Pascal avec des choix de $n'$ et $k'$ pertinents.
   - On veillera à bien vérifier que les conditions sur $n'$ et $k'$ indiquées dans la relation de Pascal sont bien vérifiées pour nos choix.
2. Raisonner par récurrence, en structurant la solution :
   - Définir un prédicat $\mathscr{P}_n$ pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Initialiser à $n = 1$ en justifiant que $\mathscr{P}_1$ est vraie.
   - Rédiger l'hérédité, en commençant par écrire « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie ». Le découpage

   $$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1}$$

   pourra être utile, afin d'appliquer le résultat de la question 1, pour des valeurs licites de $k$.

### INDICATION(S) POUR L'EXERCICE F1.26. ÉNONCÉ UN CORRIGÉ

1. 
   - Écrire $\binom{n}{k}$ comme une fraction mettant en jeu des factorielles.
   - Simplifier $\frac{k}{k!}$.
   - Transformer l'écriture de $(n-k)!$ pour faire apparaître le coefficient binomial demandé.
2. 
   - Écrire $\binom{n}{k}$ comme une fraction mettant en jeu des factorielles.
   - Simplifier $\frac{k\times(k-1)}{k!}$.
   - Transformer l'écriture de $(n-k)!$ pour faire apparaître le coefficient binomial demandé.

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.9. ÉNONCÉ INDICATION(S)

- Supposons la fraction $\frac{n}{d}$ est irréductible, i.e. que le seul diviseur positif commun à $n$ et $d$ est 1.
- Démontrons que la fraction $\frac{d-n}{d}$ est irréductible, i.e. que le seul diviseur positif commun à $d-n$ et $d$ est 1.
- Soit $a \in \mathbb{N}$ un diviseur commun à $d-n$ et $d$. Nous allons prouver que $a$ est alors un diviseur de $n$, ce qui nous permettra de conclure ($a$ divisera $n, d$ et $a$ sera positif, donc vaudra 1 d'après l'hypothèse initiale).
- Comme $a$ divise $d-n$, il existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$(\star) \qquad d-n = q_1 \times a\,.$$
Comme $a$ divise $d$, il existe $q_2 \in \mathbb{Z}$ tel que :
$$(\star\star) \qquad d = q_2 \times a\,.$$
D'après $(\star)$ et $(\star\star)$ :
$$n = d-(d-n) = q_2 \times a - q_1 \times a = (q_2 - q_1) \times a\,.$$
Comme $q_2 - q_1 \in \mathbb{Z}$, nous déduisons de l'identité $n = (q_2 - q_1) \times a$, que $a$ divise $n$. Q.E.D.

Analyse de cette solution

Il convient de toujours structurer nos démonstrations et de nous efforcer de faire preuve de clarté. En particulier, nous aurons le souci d'expliquer le chemin emprunté pour aboutir au but et de donner des arguments précis pour justifier nos assertions.

Dans notre solution, quatre parties indiquées par des points se détachent.

*1^er point* Dans le premier point, nous énonçons notre hypothèse « la fraction $\frac{n}{d}$ est irréductible » et nous la traduisons de manière plus concrète, à l'aide de la définition F1.7 de fraction irréductible.

*2^ème point* Le deuxième point nous permet de rappeler le but, mais surtout de l'exprimer sous forme concrète, encore une fois à l'aide de la définition F1.7 de fraction irréductible.

Ces deux premières étapes sont essentielles, car en confrontant notre objectif et l'hypothèse, un chemin vers une solution apparaît (celui exposé au troisième point).

*3^ème point* Dans le troisième point, on introduit un diviseur positif de $d-n$ et $d$, noté $a$, en veillant à bien indiquer l'ensemble dans lequel « vit » cette nouvelle variable (ici $\mathbb{N}$). On peut alors, au moyen de $a$, énoncer clairement notre stratégie pour résoudre le problème : nous nous proposons de démontrer que $a$ divise $n$.

*4^ème point* Il s'agit de démontrer $a$ divise bel et bien $n$. Pour cela, nous traduisons formellement des hypothèses faites sur le nombre $a$ :
- $a$ divise $d-n$ ;
- $a$ divise $d$

à l'aide des identités $(\star)$ et $(\star\star)$, en prenant de nouveau le soin d'indiquer où « vivent » les nouvelles variables ($q_1$ et $q_2$) introduites. Cette étape est essentielle car elle nous livre des identités, qui permettent de calculer. En combinant judicieusement $(\star)$ et $(\star\star)$, nous arrivons à faire apparaître une factorisation de $n$ par $a$. Il est important de souligner que $q_2 - q_1$ appartient à $\mathbb{Z}$ pour pouvoir conclure.

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.10. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. - Supposons qu'il existe deux entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $a \times u + b \times v = 1$.
   - Démontrons que $a$ et $b$ sont premiers entre eux, i.e. que 1 est le seul diviseur positif commun à $a$ et $b$.
   - Soit $d \in \mathbb{N}$ un diviseur commun à $a$ et $b$. Nous souhaitons démontrer que $d = 1$.
   - Comme $d$ divise $a$, il existe $q_1 \in \mathbb{Z}$ tel que :
   $$(\star) \qquad a = q_1 \times d\,.$$
   Comme $d$ divise $b$, il existe $q_2 \in \mathbb{Z}$ tel que :
   $$(\star\star) \qquad b = q_2 \times d\,.$$
   D'après l'hypothèse initiale, $(\star)$ et $(\star\star)$ :
   $$1 = a \times u + b \times v = q_1 \times d \times u + q_2 \times d \times v = (q_1 \times u + q_2 \times v) \times d\,.$$
   Comme $q_1 \times u + q_2 \times v \in \mathbb{Z}$, nous en déduisons que $d$ est un diviseur positif de 1. Comme 1 est le seul diviseur positif de 1, $d = 1$. Q.E.D.
2. - Nous commençons par observer que la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est bien définie, car $14n+3 \neq 0$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions $3 = -14n$ et 2 diviserait 3, ce qui n'est pas.
   - Nous devons démontrer que la fraction $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible, i.e. que les nombres $21n+4$ et $4n+3$ sont premiers entre eux.
   - Nous observons que :
   $$\underbrace{(21n+4)}_{a} \times \underbrace{(-2)}_{u} + \underbrace{(14n+3)}_{b} \times \underbrace{3}_{v} = 1\,.$$
   D'après 1, les nombres $21n+4$ et $4n+3$ sont premiers entre eux. Q.E.D.

**Analyse de cette solution**

1. La structure de la solution proposée pour cette question est voisine de celle donnée pour l'exercice F1.9.
   - On écrit l'hypothèse initiale.
   - On indique ce que l'on souhaite démontrer, en rendant aussi explicite que possible l'objectif.
   - On introduit un diviseur positif $d$ commun à $a$ et $b$, en indiquant dans quel ensemble il « vit ».
   - On traduit formellement les propriétés « $d$ divise $a$ » et « $d$ divise $b$ », que l'on combine avec l'hypothèse initiale pour établir que $d = 1$. Le fait que $q_1 \times u + q_2 \times v \in \mathbb{Z}$ est essentiel et doit être souligné. Le ressort de cette démonstration est « 1 est le seul diviseur positif de 1 ».
2. - Bien que l'énoncé nous propose une fraction, implictement bien définie, nous veillons à justifier le caractère bien définie de la fraction à étudier. Réfléchir à la bonne définition des objets de l'étude est très pertinent.
   - Il s'agit de la question 2 d'un exercice. S'appuyer sur la question 1 pour la résoudre est naturel.
   - Nous reformulons la question posée, pour établir un lien avec le résultat obtenu à la question 1.
   - Il s'agit ensuite de faire quelques tentatives pour trouver une combinaison qui nous permet de conclure.

**Ouverture**

Le théorème de Bézout, vu en Mathématiques Expertes et étudié en cours d'année de MP2I, s'énonce comme suit. Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$, non tous les deux nuls, $a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
La question 1 de l'exercice est une version partielle de ce théorème (seul le sens réciproque de l'équivalence a été établi).

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.12. ÉNONCÉ INDICATION(S)

(a)
- Nous commençons par calculer $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}$ en écrivant les deux fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$ avec le même dénominateur, ici 15, qui est le plus petit commun multiple de 3 et 5 :
$$\frac{2}{3}-\frac{4}{5}=\frac{10}{15}-\frac{12}{15}=-\frac{2}{15}.$$
Nous en déduisons :
$$(\star)\qquad \left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)^2=\left(-\frac{2}{15}\right)^2=\left(-\frac{2}{15}\right)\times\left(-\frac{2}{15}\right)=\frac{(-2)\times(-2)}{15\times 15}=\frac{2^2}{3^2\times 5^2}.$$
- Nous calculons ensuite $\frac{5}{9}-\frac{15}{18}$, écrivant la fraction $\frac{5}{9}$ avec 18 au dénominateur :
$$(\star\star)\qquad \frac{5}{9}-\frac{15}{18}=\frac{10}{18}-\frac{15}{18}=-\frac{5}{18}=-\frac{5}{2\times 3^2}.$$
- Grâce à $(\star)$, $(\star\star)$ et les rappels F1.11 :
$$\left(\frac{2}{3}-\frac{4}{5}\right)^2\div\left(\frac{5}{9}-\frac{15}{18}\right)=\frac{2^2}{3^2\times 5^2}\div\left(-\frac{5}{2\times 3^2}\right)=\frac{2^2}{3^2\times 5^2}\times\left(-\frac{2\times 3^2}{5}\right)=-\frac{2^3\times 3^2}{3^2\times 5^3}=-\frac{2^3}{5^3}=-\frac{8}{125}.$$
Des décompositions en produits de facteurs premiers de 8 et 125 obtenues en cours de calcul, nous déduisons que 8 et 125 sont premiers entre eux. La fraction $-\frac{8}{125}$ est donc irréductible.

(b)
- Nous souhaitons écrire les trois fractions $\frac{1}{15}$, $\frac{5}{42}$ et $\frac{2}{105}$ avec le même dénominateur. Choisir $15\times 42\times 105=66\,150$ comme dénominateur commun ne serait guère pertinent ici, car les nombres qui apparaîtraient alors au numérateur « enfleraient » inutilement. Trouver la forme irréductible n'en serait que plus compliqué.
- Nous allons plutôt choisir le plus petit commun multiple de
$$15=3\times 5\quad;\quad 42=2\times 3\times 7\quad;\quad 105=3\times 5\times 7$$
qui est $2\times 3\times 5\times 7=210$.
- Nous calculons alors :
$$\frac{1}{15}-\frac{5}{42}-\frac{2}{105}=\frac{14}{210}-\frac{25}{210}-\frac{4}{210}=-\frac{15}{210}=-\frac{3\times 5}{2\times 3\times 5\times 7}=-\frac{1}{14}\qquad\text{(forme irréductible)}.$$

(c)
- Nous commençons par calculer $-\frac{4}{39}+\frac{7}{26}$ en écrivant les deux fractions $-\frac{4}{39}$ et $\frac{7}{26}$ avec le même dénominateur. Nous pourrions choisir $39\times 26=1\,014$, mais comme discuté dans la solution (b), choisir le plus petit multiple de $39=3\times 13$ et $26=2\times 13$, qui est $2\times 3\times 13=78$, est plus pertinent.
$$(\star)\qquad -\frac{4}{39}+\frac{7}{26}=-\frac{8}{78}+\frac{21}{78}=\frac{13}{78}=\frac{13}{2\times 3\times 13}=\frac{1}{6}.$$
- Nous calculons ensuite $-\frac{5}{22}+\frac{17}{132}$, écrivant la fraction $-\frac{5}{22}$ avec $132=6\times 22$ au dénominateur :
$$(\star\star)\qquad -\frac{5}{22}+\frac{17}{132}=-\frac{30}{132}+\frac{17}{132}=-\frac{13}{132}=-\frac{13}{132}.$$
- Grâce à $(\star)$, $(\star\star)$ et les rappels F1.11 :
$$\frac{-\frac{4}{39}+\frac{7}{26}}{-\frac{5}{22}+\frac{17}{132}}=\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{13}{132}}=\frac{1}{6}\times\left(-\frac{132}{13}\right)=-\frac{132}{6\times 13}=-\frac{6\times 22}{6\times 13}=-\frac{22}{13}\qquad\text{(forme irréductible)}.$$

Analyse de cette solution

> Nous pouvons retenir les deux idées suivantes, lorsque nous avons à calculer des fractions.
> - Pour mettre au même dénominateur des fractions, nous pouvons choisir le produit de tous les dénominateurs comme nouveau dénominateur, mais considérer le plus petit commun multiple de tous les dénominateurs comme nouveau dénominateur est plus pertinent. En effet, les nombres qui apparaissent dans les calculs sont alors plus petits. Cf. début de la solution de (b).
> - Pour simplifier une fraction et en obtenir une forme irréductible, les factorisations obtenues en cours de calculs peuvent être utiles. Cf. fin de la solution de (a).

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.17. ÉNONCÉ INDICATION(S)

- D'après la relation de récurrence F1.15, appliquée deux fois :

$$n! = n \times (n-1)! = n \times (n-1) \times (n-2)!\,.$$

  Nous en déduisons que $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
- Les entiers $n$ et $n-1$ sont consécutifs, donc au moins l'un est pair. On en déduit que $\dfrac{n!}{(n-2)! \times 2!} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ est entier.

Analyse de cette solution

- L'objet de l'étude est le coefficient binomial $\binom{n}{2}$. On nous demandait d'expliciter ce coefficient binomial et de prouver son caractère entier.
- Les coefficients binomiaux ont une interprétation combinatoire. Ainsi $\binom{n}{2}$ est-il le nombre de parties à 2 éléments d'un ensemble possédant $n$ éléments. Avec cette propriété, le caractère entier de $\binom{n}{2}$ est immédiat.

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.22. ÉNONCÉ INDICATION(S)

- Par définition :

$$(\star) \qquad \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\times((n-1)-(k-1))!}+\frac{(n-1)!}{k!\times((n-1)-k)!}=\frac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!\times(n-1-k)!}\,.$$

Pour poursuivre le calcul, nous cherchons à écrire les fractions $\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!}$ et $\dfrac{(n-1)!}{k!\times(n-1-k)!}$ avec le même dénominateur.

- D'après la relation de récurrence F1.15 :

$$k\times(k-1)!\times(n-k)!=k!\times(n-k)! \qquad \text{et} \qquad (n-k)\times k!\times(n-1-k)!=k!\times(n-k)!\,.$$

Nous pouvons donc choisir $k!\times(n-k)!$ comme dénominateur commun. Nous obtenons les écritures désirées suivantes :

$$(\star\star) \qquad \frac{(n-1)!}{(k-1)!\times(n-k)!}=\frac{k\times(n-1)!}{k!\times(n-k)!} \qquad \text{et} \qquad \frac{(n-1)!}{k!\times(n-1-k)!}=\frac{(n-k)\times(n-1)!}{k!\times(n-k)!}\,.$$

- De $(\star)$, $(\star\star)$ et de la la relation de récurrence F1.15, nous déduisons :

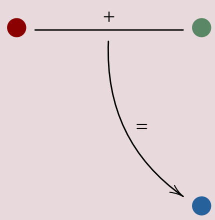
$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\frac{k\times(n-1)!}{k!\times(n-k)!}+\frac{(n-k)\times(n-1)!}{k!\times(n-k)!}=\frac{n\times(n-1)!}{k!\times(n-k)!}=\frac{n!}{k!\times(n-k)!}=\binom{n}{k}\,.$$

**Analyse de cette solution**

- Après avoir écrit les coefficients binomiaux $\binom{n-1}{k-1}$ et $\binom{n-1}{k}$ sous forme de fractions, il est naturel de vouloir les écrire avec le même dénominateur, pour poursuivre le calcul.
- Le point crucial est de déterminer un multiple commun des nombres $(k-1)!\times(n-k)!$ et $k!\times(n-1-k)!$ (cf. deuxième point de la solution). Il faut faire preuve de délicatesse et de réflexion. Choisir le produit $(k-1)!\times(n-k)!\times k!\times(n-1-k)!$ comme dénominateur commun ajouterait une complexité inutile dans la suite de la solution (où il s'agit de faire apparaître un coefficient binomial) et ne serait guère pertinent.
- Le résultat établi ici :

$$\text{Pour tout entier } n\geqslant 2, \text{ pour tout } k\in\mathbb{N} \text{ tel que } 1\leqslant k\leqslant n-1,\ \binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

est appelé relation de Pascal et est à savoir.
- La relation de Pascal se reflète comme suit sur le triangle de Pascal.




La somme de deux coefficients binomiaux consécutifs sur une ligne (marqués en rouge et en vert) égale le coefficient binomial (marqué en bleu), situé sous le coefficient noté en vert.
- La relation de Pascal peut aussi être démontrée par voie combinatoire, cf. F1.21. Nous donnerons une telle démonstration en cours d'année de MP2I.

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.24. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. La relation de Pascal peut aussi s'écrire :

$$\text{Pour tout entier } n' \geqslant 2, \text{ pour tout } k' \in \mathbb{N} \text{ tel que } 1 \leqslant k' \leqslant n'-1,\ \binom{n'-1}{k'-1} + \binom{n'-1}{k'} = \binom{n'}{k'}$$

puisque les variables sont muettes. Si l'on pose $n' := n+1$ et $k' := k$, alors :
- comme $n \in \mathbb{N}^*$, $n' = n+1$ est un entier tel que $n' \geqslant 2$ ;
- comme $k$ est un entier tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, $k' = k$ est un entier tel que $1 \leqslant k' \leqslant n = n'-1$.

La relation de récurrence vaut donc pour nos choix de $n'$ et $k'$. Elle livre :

$$\binom{n+1-1}{k-1} + \binom{n+1-1}{k} = \binom{n+1}{k}$$

i.e. :

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

qui est l'identité demandée.

2. 
- Nous démontrons le résultat en raisonnant pas récurrence.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons :

$$\mathscr{P}_n \ : \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n .$$

- *Initialisation à $n = 1$* D'une part,

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} = \binom{1}{0} + \binom{1}{1} = 1+1 = 2$$

et d'autre part $2^1 = 2$. La propriété $\mathscr{P}_1$ est donc vraie.

- *Hérédité* Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie, i.e. tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Nous observons :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1} .$$

D'après la question 1 et les valeurs remarquables des coefficients binomiaux :

$$(\star) \qquad \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left( \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) + 1 = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1}}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}_{S_2} + 2 .$$

Nous calculons séparément les sommes $S_1$ et $S_2$.

  - Nous commençons par observer que : $S_1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}$. Grâce à l'hypothèse de récurrence et aux valeurs remarquables des coefficients binomiaux :

$$(\star\star\star) \qquad S_1 = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n}{n}}_{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} - \binom{n}{n} = 2^n - 1 .$$

  - Grâce à l'hypothèse de récurrence et aux valeurs remarquables des coefficients binomiaux :

$$(\star\star) \qquad S_2 = \underbrace{\binom{0}{n} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}_{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}} - \binom{0}{n} = 2^n - 1 .$$

  - De $(\star)$, $(\star\star)$ et $(\star\star\star)$, nous déduisons :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = 2^n - 1 + 2^n - 1 + 2 = 2 \times 2^n = 2^{n+1} .$$

Analyse de cette solution

1. - Le résultat a été obtenu en effectuant des substitutions dans la relation de Pascal. Il est essentiel de vérifier que les conditions « $n'$ est un entier supérieur ou égal à 2 » et « $k'$ est un entier tel que $1 \leqslant k' \leqslant n'-1$ » sont satisfaites pour nos choix de $n'$ et $k'$. En effet, la relation de Pascal vaut dans un certain champ d'application, pas pour des entiers $n'$ et $k'$ quelconques (elle n'aurait d'ailleurs pas de sens).
   - Nous avons choisi de déduire le résultat demandé de la relation de Pascal, mais nous aurions pu également reprendre la solution de l'exercice F1.22 pour l'adapter.
2. - Nous avons structuré notre solution en :
     — indiquant le mode de raisonnement choisi (par récurrence ici) ;
     — écrivant soigneusement un prédicat (cf. définition de $\mathscr{P}_n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$) ;
     — initialisant le raisonnement
     — rédigeant rigoureusement l'hérédité, en commençant par écrire « Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie », puis en explicitant notre hypothèse de récurrence.
   - Dans l'hérédité, un point clé est le découpage :
   $$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} + \binom{n+1}{n+1}.$$
   En effet, nous ne pouvons pas appliquer le résultat de la question 1 directement sur la somme $\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k}$ puisque les conditions sur $k$ ($1 \leqslant k \leqslant n$) ne sont pas satisfaites pour tous les entiers $k$ égaux à $0, 1, 2, \dots, n, n+1$. Quitte à insister, la formule de la question 1 est valide sous conditions sur $n$ et $k$.
   - Le résultat de cette question 2 peut aussi être démontré par voie combinatoire, cf. F1.21, ce manière élégante. Nous donnerons une telle démonstration en cours d'année de MP2I.

Ouverture

La formule du binôme de Newton (vue en Mathématiques Expertes et retravaillée intensément au cours de l'année de MP2I) :

$$\text{Pour tout } a \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } b \in \mathbb{R}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

aurait permis de répondre très rapidement à la question posée. En effet, il aurait suffi de la spécialiser à $a := 1$ et $b := 1$.
Une démonstration classique de la formule du binôme de Newton, par récurrence, est d'ailleurs voisine de celle exposée dans la solution de la question 2.

## UN CORRIGÉ DE L'EXERCICE F1.26. ÉNONCÉ INDICATION(S)

1. D'après la définition d'un coefficient binomial en termes de factorielles et la relation de récurrence F1.15 :

$$k \times \binom{n}{k} = \frac{k \times n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)! \times (n-k)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)! \times ((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

2. D'après la définition d'un coefficient binomial en termes de factorielles et la relation de récurrence F1.15 :

$$k(k-1) \times \binom{n}{k} = \frac{k \times (k-1) \times n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)! \times (n-k)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{(k-2)! \times ((n-2)-(k-2))!} = n \times (n-1) \binom{n-2}{k-2}.$$

**Analyse de cette solution**

- Après avoir écrit le coefficient binomial sous forme d'une fraction mettant en jeu des factorielles, on applique naturellement la relation de récurrence pour simplifier $\dfrac{k}{k!}$ en 1 et $\dfrac{k \times (k-1)}{k!}$ en 2.
- Il reste alors à transformer l'écriture du terme $(n-k)!$ au dénominateur pour faire apparaître le coefficient binomial demandé : $(n-k)! = ((n-1)-(k-1))!$ en 1 et $(n-k)! = ((n-2)-(k-2))!$ en 2.
- Les deux résultats de cet exercice sont précieux pour calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi binomiale.