

FEUILLE D'EXERCICES N°29

ARITHMÉTIQUE DES POLYNÔMES ET FRACTIONS RATIONNELLES

EXERCICE TD29.1 (PGCD DE DEUX POLYNÔMES)

Calculer le PGCD de

$$P_1 := X^5 - X^4 + 2X^3 + 1 \quad \text{et} \quad P_2 := X^5 + X^4 + 2X^2 - 1$$

EXERCICE TD29.2 (AUTOUR DU THÉORÈME DE BÉZOUT)

Soient P et Q deux polynômes non nuls de $\mathbf{K}[X]$.

- Démontrer que $P \wedge Q \neq 1$ si et seulement si

$$\exists (U, V) \in (\mathbf{K}[X] \setminus \{0_{\mathbf{K}[X]}\})^2 \quad UP + VQ = 0, \deg(U) < \deg(Q) \quad \text{et} \quad \deg(V) < \deg(P)$$

- Supposons $P \wedge Q \neq 1$. Y a-t-il unicité du couple (U, V) introduit en 1.

EXERCICE TD29.3 (ÉQUATION DE BÉZOUT)

Soient

$$A := X^5 + 3X^3 - 10X \quad \text{et} \quad B := X^4 + 9X^2 + 20$$

- Déterminer $A \wedge B$.
- Donner une solution de l'équation

$$(E) \quad AU + BV = A \wedge B$$

d'inconnue $(U, V) \in \mathbf{K}[X]^2$.

- Résoudre l'équation (E).

EXERCICE TD29.4 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{R}(X)$)

Décomposer

$$F := \frac{4X - 3}{X(X - 1)^2}$$

en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.

EXERCICE TD29.5 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{R}(X)$)

Décomposer

$$F := \frac{5X + 4}{(X - 2)^2 (X + 3) (X + 1)}$$

en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.

EXERCICE TD29.6 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{R}(X)$)

Décomposer

$$F := \frac{3X - 1}{X^2 (X + 1)^2}$$

en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.

EXERCICE TD29.7 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{R}(X)$)

Décomposer

$$F := \frac{X^2 - X + 1}{(X - 1)^2 (X - 2)^2 (X + 3)}$$

en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.

EXERCICE TD29.8 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{R}(X)$)

Décomposer

$$F := \frac{2X^2 + 1}{(X-1)^2 (X+2)^3}$$

en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.**EXERCICE TD29.9 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{C}(X)$ ET DANS $\mathbf{R}(X)$)**

Décomposer

$$F := \frac{1}{X^3 (X^2 + 1)^2}$$

en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$, puis dans $\mathbf{R}(X)$.**EXERCICE TD29.10 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{C}(X)$ ET DANS $\mathbf{R}(X)$)**

Décomposer

$$F := \frac{X^4}{(X-2)(X^2 + X + 1)}$$

en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$, puis dans $\mathbf{R}(X)$.**EXERCICE TD29.11 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{C}(X)$ ET DANS $\mathbf{R}(X)$)**

Décomposer

$$F := \frac{X^6}{(X-1)^4 (X^2 + 1)}$$

en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$, puis dans $\mathbf{R}(X)$.**EXERCICE TD29.12 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{R}(X)$)**Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Décomposer

$$F_n := \frac{n!}{X(X+1) \dots (X+n)}$$

en éléments simples dans $\mathbf{R}(X)$.**EXERCICE TD29.13 (DÉCOMPOSITION EN ÉLÉMENTS SIMPLES DANS $\mathbf{C}(X)$, DANS $\mathbf{R}(X)$ ET CALCUL DE SOMME)**

Décomposer

$$F := \frac{X}{X^4 + X^2 + 1}$$

en éléments simples dans $\mathbf{C}(X)$, puis dans $\mathbf{R}(X)$. Simplifier ensuite, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la somme

$$S_n := \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$$