FEUILLE D'EXERCICES N°28

ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS

EXERCICE TD28.1 (PROJETÉ ORTHOGONAL DANS UN ESPACE DE FONCTIONS)

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1. Démontrer que
$$\langle f, g\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(x)g(x)\underset{\cdot}{\mathrm{x}}$$
définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions :
$$f : x \longmapsto \cos(x) \qquad \text{et} \qquad g : x \longmapsto \cos(2x)$$
Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2(x)$.

EXERCICE TD28.2 (DISTANCE À UN SOUS-ESPACE D'UN ESPACE DE MATRICES)

Soit E un espace préhilbertien. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, on pose :
$$\langle A, A'\rangle := aa' + bb' + cc' + dd'$$

1. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
2. Déterminer la distance de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ au sous-espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures.

EXERCICE TD28.3 (PROJECTION ORTHOGONALE SUR UNE DROITE)

Soit E un espace euclidien.

1. Démontrer que si $\varphi \in E^*$, il existe un unique $a \in E$ tel que :
$$\forall x \in E, \quad \varphi(x) = \langle a, x\rangle \ .$$
2. Soit $x_0 \in E$ tel que $||\, x_0\, || = 1$. On note $\mathrm{Vect}\,(x_0)$ la droite engendrée par x_0.
   (a) Donner la définition de la projection orthogonale p sur $\mathrm{Vect}\,(x_0)$.
   (b) Pour tout $x \in E$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbf{R}$ tel que $p(x) = \lambda_x \cdot x_0$. On définit l'application $g : E \longrightarrow \mathbf{R}$ par
   $$\forall x \in E, \quad g(x) = \lambda_x$$
   Démontrer que g est une forme linéaire sur E et déterminer l'élément $b \in E$ tel que
   $$\forall x \in E, \quad g(x) = \langle b, x\rangle$$

EXERCICE TD28.4 (DISTANCE À UNE DROITE ET DISTANCE À UN HYPERPLAN)

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soient $a \in E \setminus \{0_E\}$, $D := \mathrm{Vect}(a)$ et $H := D^{\perp}$.
Exprimer, pour tout $x \in E$, $\mathrm{d}(x, H)$ et $\mathrm{d}(x, D)$ en fonction de $||\, x\, ||$ et $\langle x, a\rangle$.

EXERCICE TD28.5 (PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN DE $\mathbf{R}^4$)

Munissons $\mathbf{R}^4$ de son produit scalaire usuel et notons F le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $u = (0, 3, 1, -1)$ et $v = (1, 2, -1, 1)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^{\perp}$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^{\perp}$ dans la base canonique.

Exercice TD28.6 (projection orthogonale sur un plan de $\mathbf{R}^4$)

Munissons $\mathbf{R}^4$ du produit scalaire usuel et notons F le sous-espace vectoriel d'équations :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & 0 \end{array}\right. .$$

1. Déterminer une base orthonormale de F et une base orthonormale de $F^{\perp}$.
2. Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur F parallèlement à $F^{\perp}$ dans la base canonique.

Exercice TD28.7 (projection orthogonale dans un espace de polynômes)

Munissons $\mathbf{R}[X]$ du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ défini par

$$\forall (P,Q) \in \mathbf{R}[X]^2, \quad \langle P, Q\rangle := \int_0^1 t \cdot \widetilde{P}(t) \cdot \widetilde{Q}(t)\, \mathrm{d}t$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. Déterminer une base orthonormale de $\mathbf{R}_2[X]$.
3. Déterminer la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbf{R}_2[X]$.

Exercice TD28.8 (autre démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soient $(x,y) \in E^2$.

1. Développer :
$$\left|\left|\, ||y||^2 x - \langle x, y\rangle\, y \right|\right|^2 .$$
2. Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice TD28.9 (CS pour être une base orthonormée)

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Soit $\mathscr{B} := (e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs unitaires de E telle que

$$\forall x \in E \quad x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle \cdot e_k$$

Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E.

Exercice TD28.10 (autour du théorème de Riesz)

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E. Démontrer que

$$\forall (a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^n \quad \exists x \in E \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad \langle x, e_i\rangle = a_i$$

Exercice TD28.11 (matrices symétriques vs. matrices antisymétriques)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour tout $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, posons

$$\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}\left(M^\top N\right) .$$

Démontrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques sont en somme directe orthogonale dans l'espace euclidien $(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Exercice TD28.12 (matrice de Gram)

Soit $(E,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace préhilbertien. Étant donnés un entier $n \in \mathbf{N}^*$ et n vecteurs $x_1,\dots,x_n$, notons

$$G(x_1,\dots,x_n) := \left(\langle x_i, x_j\rangle\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$$

1. Démontrer que $\det G(x_1,\dots,x_n) \neq 0$ si et seulement si la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est libre.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de F. Démontrer que pour tout $x \in E$

$$\mathrm{d}(x,F) = \sqrt{\frac{\det G(e_1,\dots,e_n,x)}{\det G(e_1,\dots,e_n)}}$$