FEUILLE D'EXERCICES N°27

SÉRIES NUMÉRIQUES

EXERCICE TD27.1 (NATURE DE SÉRIES)

Étudier la nature des séries suivantes.

(1) $\sum \dfrac{n}{n^3+1}$ (2) $\sum \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ (3) $\sum \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

(4) $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (5) $\sum \dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$ (6) $\sum \dfrac{(-1)^n+n}{n^2+1}$

(7) $\sum \dfrac{2n+1}{n!}$ (8) $\sum \dfrac{\ln(n^n)}{n!}$ (9) $\sum \dfrac{n!}{n^{an}}$ $(a \in \mathbf{R})$

(10) $\sum \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$ (11) $\sum \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^{n\cdot(-1)^n}$ (12) $\sum \dfrac{n^\alpha (\ln n)^n}{n!}$ $(\alpha \in \mathbf{R})$

(13) $\sum 1-\cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$ (14) $\sum \sqrt{\operatorname{ch}\left(\dfrac{1}{n}\right)-1}$ (15) $\sum \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(16) $\sum e^{1/n}-a-\dfrac{b}{n}$ $(a,b \in \mathbf{R})$ (17) $\sum \arctan(n+a)-\arctan(n)$ $(a \in \mathbf{R})$ (18) $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\sqrt{n}}$

(19) $\sum \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+a}}\right)$ $(a \in \mathbf{R})$ (20) $\sum \sqrt[3]{n^3+an}-\sqrt{n^2+3}$ $(a \in \mathbf{R})$ (21) $\sum \sin\left(\dfrac{\pi n^2}{n+1}\right)$

EXERCICE TD27.2 (SÉRIE LACUNAIRE)

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$u_n := \begin{cases} 1/n & \text{si } n \text{ est un carré d'entier} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

EXERCICE TD27.3 (SÉRIE DONT LE TERME GÉNÉRAL EST DÉFINI PAR UNE SUITE RÉCURRENTE)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0>0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

1. Démontrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un réel ℓ.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n-\ell$?

EXERCICE TD27.4 (AUTOUR DE LA FORMULE DE STIRLING)

Soit $a>0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $u_n := \dfrac{a^n n!}{n^n}$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum_n u_n$ lorsque $a \neq e$.
2. On suppose que $a=e$. Démontrer qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. Que dire de la nature de la série $\sum_n u_n$?

EXERCICE TD27.5 (SÉRIE DONT LE TERME GÉNÉRAL EST UNE FRACTION RATIONNELLE)

Démontrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}$ est convergente et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^3+3n^2+2n}$.

EXERCICE TD27.6 (SÉRIE GÉOMÉTRIQUE DÉRIVÉE)

Soit $x \in]-1,1[$. Démontrer que la série $\sum n\cdot x^n$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot x^n$.

Exercice TD27.7 (télescopage)

Démontrer que la série de terme général $u_n := \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ est convergente et calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n$.

Exercice TD27.8 (autour de la série exponentielle)

Justifier que les séries suivantes convergent et calculer leurs sommes.

$$\sum \frac{n+1}{n!} \qquad \sum \frac{n^2-2}{n!} \qquad \sum \frac{n^3}{n!}$$

Exercice TD27.9 (banque CCINP)

On considère la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver qu'au voisinage de $+\infty$
$$\pi \cdot \sqrt{n^2+n+1} = n \cdot \pi + \frac{\pi}{2} + \alpha \cdot \frac{\pi}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que la série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. La série $\sum \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Exercice TD27.10 (banque CCINP)

Justifier que

$$\cos(1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$$

puis démontrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Exercice TD27.11 (formule d'addition pour Arctan)

1. Déterminer la nature de la série $\sum \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.
2. Soit $k \in \mathbf{N}$. Démontrer que $\mathrm{Arctan}(k+1) - \mathrm{Arctan}(k) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{k^2+k+1}\right)$.
3. Déterminer la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$.

Exercice TD27.12 (somme des premiers carrés)

Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum \frac{1}{1^2+2^2+\ldots+n^2}$.

Exercice TD27.13 (série dont le terme général est défini par une suite récurrente)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sin(u_n)$ valable pour tout $n \in \mathbf{N}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.
2. Déterminer un équivalent de $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ et en déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice TD27.14 (équivalents des sommes partielles d'une série géométrique divergente)

Soit q un réel strictement positif.

1. Supposons $q = 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Supposons $q > 1$. Donner un équivalent de $\sum_{k=0}^{n} q^k$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD27.15 (ÉQUIVALENT DE $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\sqrt{n}$)
Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots\sqrt{n}}$.

EXERCICE TD27.16 (UNE SÉRIE DE BERTRAND)
Étude de la nature de la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}\cdot\ln^2(n)}$.

EXERCICE TD27.17 (SÉRIES DE BERTRAND)
Soient $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Démontrer

$$\sum \frac{1}{n^\alpha \cdot \ln^\beta(n)} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{array} \right.$$

EXERCICE TD27.18 (QUELQUES ÉQUIVALENTS ASSOCIÉS AUX SÉRIES DE RIEMANN)
Soit α un réel strictement positif.

1. Supposons $\alpha > 1$. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque n tend ver $+\infty$.
2. Supposons $\alpha = 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend ver $+\infty$.
3. Supposons $\alpha < 1$. Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ lorsque n tend ver $+\infty$.

EXERCICE TD27.19 (ÉQUIVALENT DE ζ EN 1^+)
Déterminer un équivalent, lorsque x tend vers 1^+, de la fonction ζ définie par

$$\zeta \left| \begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} \end{array} \right.$$

EXERCICE TD27.20 (SOMMATION DES ÉQUIVALENTS)
Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels telles que $v_n \geqslant 0$ à partir d'un certain rang et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.

1. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Démontrer $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.
2. On suppose que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent. Démontrer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$.

EXERCICE TD27.21 (RÈGLE DE D'ALEMBERT)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose qu'il existe $\ell \in \mathbf{R}_+$ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

1. Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
3. Si $\ell = 1^+$, alors $\sum u_n$ diverge.
4. Soit x un réel strictement positif. Déterminer la nature des séries $\sum \dfrac{x^n}{n^2}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ et $\sum n! \cdot x^{n^2}$.

Exercice TD27.22 (critère de comparaison logarithmique)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de réels strictement positifs. On suppose que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

à partir d'un certain rang. Démontrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Exercice TD27.23 (règle de Raabe-Duhamel)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

avec un développement asymptotique de la forme

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ converge.
2. Montrer que si $\alpha < 1$, alors $\sum u_n$ diverge.
3. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}{1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n+1)}$
4. Soient a et b des réels strictement positifs. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{a(a+1)\ldots(a+n)}{b(b+1)\ldots(b+n)}$.