Feuille d'exercices n°26

Groupe symétrique et déterminant

Exercice TD26.1 (Étude d'une permutation de S_7)

Soit $\sigma \in S_7$ définie par

$$\sigma = (\ 1\ \ 4\ ) \circ (\ 1\ \ 2\ \ 3\ ) \circ (\ 4\ \ 5\ ) \circ (\ 1\ \ 4\ )$$

1. Décomposer σ en produit de transposition.
2. Décomposer σ en produit de cycles à supports disjoints.
3. Déterminer la signature de σ.
4. Calculer σ^{2023}.

Exercice TD26.2 (Étude d'une permutation de S_9)

Soit $\sigma \in S_9$ définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 8 & 9 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

1. Calculer σ^{15227}.
2. Déterminer l'ordre de σ dans S_9.
3. Donner la signature de σ.

Exercice TD26.3 (Centre de S_n)

Soit un entier $n \geqslant 3$. Démontrer que

$$Z(S_n) := \{\sigma \in S_n\ :\ \forall \tau \in S_n \quad \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma\} = \left\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\right\}$$

Exercice TD26.4 (A_n est engendré par les trois cycles)

Soit un entier $n \geqslant 3$. On pose

$$A_n := \{\sigma \in S_n\ :\ \varepsilon(\sigma) = 1\}$$

Démontrer que tout élément de A_n s'écrit comme un produit de 3-cycles.

Exercice TD26.5 (Conjugué d'un cycle)

Soit un entier $n \geqslant 3$, $p \in [\![2,n]\!]$ et $a_1, \dots, a_p$ des éléments deux-à-deux distincts de $[\![1,n]\!]$. On pose

$$c := (\ a_1\ \ a_2\ \ \dots\ \ a_p\ )$$

Calculer, pour tout $\sigma \in S_n$, $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$.

Exercice TD26.6 (Signature d'une permutation)

Soit un entier $n \geqslant 2$ et

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & \dots & 2n-1 & 2 & 4 & \dots & 2n \end{pmatrix}$$

Déterminer la signature de σ.

Exercice TD26.7 (Deux 3-cycles sont conjugués par une permutation paire)

Soit un entier $n \geqslant 5$. Soient a_1, a_2, a_3 des éléments distincts de $[\![1,n]\!]$ et b_1, b_2, b_3 des éléments distincts de $[\![1,n]\!]$. Démontrer qu'il existe une permutation paire $\sigma \in S_n$ telle que

$$\sigma \circ (\ a_1\ \ a_2\ \ a_3\ ) \circ \sigma^{-1} = (\ b_1\ \ b_2\ \ b_3\ )$$

Exercice TD26.8 (endomorphisme dont le carré en $-\mathrm{id}$)

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$. Démontrer que n est paire.

Exercice TD26.9 (déterminant de la multiplication à gauche par une matrice)

Soient un entier $n \geqslant 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Calculer le déterminant de

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array} \right.$$

Exercice TD26.10 (matrice diagonalement dominante)

Soient un entier $n \geqslant 1$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. tels que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad \left|a_{i,i}\right| > \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} \left|a_{i,j}\right|$$

1. Démontrer que A est inversible.
2. On suppose de plus que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,i} > 0$$

   Démontrer que $\det(A) > 0$.

Exercice TD26.11 (déterminant d'une matrice orthogonale)

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$.

1. Démontrer que, si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ et $M^{-1} = M^\top$ alors $\det M \in \{-1, 1\}$.
2. Étudier la réciproque de 1.

Exercice TD26.12 (déterminant et conjugaison)

Soient un entier naturel $n \geqslant 2$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On pose

$$\overline{A} = \left(\overline{a_{i,j}}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$$

Donner un lien entre $\det(A)$ et $\det\left(\overline{A}\right)$ et démontrer le résultat.

Exercice TD26.13 (déterminant de deux matrices semblables)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et A, B des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ semblables. Démontrer que $\det(A) = \det(B)$.

Exercice TD26.14 (déterminant d'une matrice antisymétrique)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice antisymétrique.

1. Démontrer que, si n est impair, alors $\det(M) = 0$.
2. A-t-on nécessairement $\det(A) = 0$ lorsque n est pair ?

Exercice TD26.15 (une modification des signes des coefficients d'une matrices)

Soient un entier $n \geqslant 2$, $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $B = \left((-1)^{i+j} \cdot a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Comparer $\det(A)$ et $\det(B)$.

Exercice TD26.16 (déterminant d'une matrices dont les coefficients valent -1 ou 1)

Soient un entier $n \geqslant 2$, $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad a_{i,j} \in \{-1, 1\}$$

Démontrer que 2^{n-1} divise $\det(A)$.

Exercice TD26.17 (critère de nullité d'une matrice)
Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A = \left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \quad \det(A+X) = \det(A) + \det(X)$$

Démontrer que $\det(A) = 0$ puis que $A = 0$.

Exercice TD26.18 (déterminant de la somme de l'identité et du carré d'une matrice réelle)
Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer que $\det\left(A^2 + I_n\right) \geqslant 0$.

Exercice TD26.19 (calcul d'un déterminant d'une matrice de format (3,3))
Soient a, b, c des nombres complexes. Calculer $\begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix}$.

Exercice TD26.20 (calcul d'un déterminant d'une matrice de format (4,4))
Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$.

Exercice TD26.21 (maximum des deux indices de l'adresse)
Calculer le déterminant des deux matrices suivantes

$$m := \left(\min\{i,j\}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \quad \text{et} \quad M := \left(\max\{i,j\}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$$

Exercice TD26.22 (polynôme caractéristique de la matrice dont les coefficients égalent 1)
Soient un entier naturel $n \geqslant 2$ et J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont tous les coefficients valent 1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, $\det(\lambda \cdot I_n - J_n)$.

Exercice TD26.23 (déterminant d'une matrice tridiagonale)
Soient a, b, c des nombres complexes Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 2, on pose

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ c & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & c & a \end{vmatrix} \qquad \text{[déterminant d'une matrice de format } (n,n)\text{]}$$

1. Démontrer que, pour tout nombre entier n supérieur à 2, $\Delta_{n+2} = a \cdot \Delta_{n+1} - b \cdot c \cdot \Delta_n$.
2. On suppose désormais que $a^2 = 4bc$. Expliciter Δ_n, pour tout nombre entier n supérieur à 2.

Exercice TD26.24 (déterminant de Cauchy)
Soient un entier $n \geqslant 2$, $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbf{C}^n$ et $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbf{C}^n$ tels que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $a_i + a_j \neq 0$. Démontrer que

$$\det\left(\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}\right) = \frac{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \cdot (b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (a_i + b_j)}$$

Exercice TD26.25 (coefficients binomiaux)

Soit un entier $n \geqslant 2$. Calculer le déterminant de la matrice A_n définie par

$$A_n := \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{1} & \dots & \binom{n}{n} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \dots & \binom{n+1}{n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \binom{n}{0} & \binom{n+1}{1} & \dots & \binom{2n}{n} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{R})$$

Exercice TD26.26 (bloc triangulaire supérieur constant et bloc triangulaire inférieur constant)

Soit un entier naturel $n \geqslant 2$.

1. On note J_n la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Montrer que la fonction

$$P \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K} & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ x & \longmapsto & \det(A + x \cdot J_n) \end{array} \right.$$

   est polynomiale de degré inférieur ou égal à 1.

2. Soient a et b deux éléments distincts de $\mathbf{K}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{K}$. Déduire de Q1 la valeur du déterminant de :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & a & \dots & a \\ b & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & b & \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Exercice TD26.27 (déterminant circulant)

1. Soient $(a,b,c) \in \mathbf{C}^3$, $A := \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$. Calculer AJ puis $\det(A)$.

2. Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^n$. Généraliser pour calculer le déterminant de :

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix}.$$

Exercice TD26.28 (critère de liberté pour une famille de fonctions)

Soient un entier $n \geqslant 2$, I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions de I vers $\mathbf{R}$.
Démontrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $x_1, \dots, x_n$ dans I tels que le déterminant de la matrice $\left(f_i(x_j)\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ soit non nul.

Exercice TD26.29 (rang de la comatrice)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Donner le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice TD26.30 (caractère ouvert de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(A,B) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Démontrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon] \quad A + \lambda \cdot B \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$$

Exercice TD26.31 (si deux matrices commutent alors leurs comatrices commutent également)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})^2$ tel que $AB = BA$. Démontrer que $\mathrm{Com}(A)\,\mathrm{Com}(B) = \mathrm{Com}(B)\,\mathrm{Com}(A)$.