Feuille d'exercices n°25

Fonctions convexes

Exercice TD25.1 (Inégalité de Jensen pour les intégrales)

Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue.

1. Justifier l'existence de $a := \min\limits_{[0,1]} f$ et $b := \max\limits_{[0,1]} f$.
2. Justifier $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \in [a,b]$.
3. Soit $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue. Démontrer

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right) \leqslant \int_0^1 \varphi(f(x))\,\mathrm{d}x$$

Exercice TD25.2 (Réciproque d'une application convexe, bijective et croissante)

Soient I, J deux intervalles, soit $f\colon I \longrightarrow J$ une application convexe, bijective et croissante. Démontrer que $f^{-1}\colon J \longrightarrow I$ est concave.

Exercice TD25.3 (Moyenne arithmético-géométrique et variante)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{R}_{>0}$.

1. Démontrer

$$(x_1 \dots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$$

2. Démontrer

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

Exercice TD25.4 (Une inégalité de convexité mettant en jeu $\ln$)

Démontrer que, pour tout $(x,y) \in]1,+\infty[^2$

$$\sqrt{\ln(x)\cdot\ln(y)} \leqslant \ln\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Exercice TD25.5 (De la convexité de $x \longmapsto x\cdot\ln(x)$)

Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\cdot\ln(x) \end{array} \right.$$

est convexe et en déduire que, pour tout $x, y, a, b > 0$

$$(x+y)\cdot\ln\left(\frac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x\cdot\ln\left(\frac{x}{a}\right) + y\cdot\ln\left(\frac{y}{b}\right)$$

Exercice TD25.6 (De la convexité de $x \longmapsto x\cdot\ln(1+e^x)$)

Établir la convexité de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) \end{array} \right.$$

puis démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x_1, \dots, x_n > 0$

$$1 + \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{1/n} \leqslant \prod_{i=1}^n (1+x_i)^{1/n}$$

En déduire que, pour tout $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n > 0$

$$\left(\prod_{i=1}^n (a_i+b_i)\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^n b_i\right)^{1/n}.$$

EXERCICE TD25.7 (FONCTION CONVEXE DOMINÉE PAR UNE FONCTION AFFINE)

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Supposons qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad f(x) \leqslant ax + b$$

Démontrer qu'il existe $c \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = ax + c$.

EXERCICE TD25.8 (FONCTION CONVEXE DE LIMITE NULLE EN $+\infty$)

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe.

1. Supposons que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Démontrer que $f \geqslant 0$.
2. Supposons que f possède une asymptote oblique en $+\infty$, i.e. qu'il existe $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que

$$f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

   On fixe un repère du plan. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f est au-dessus de son asymptote, i.e. que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) \geqslant ax + b$.

EXERCICE TD25.9 (ENCADREMENT DE L'INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONVEXE SUR UN SEGMENT)

Soient $a < b$ des réels. Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe continue.

1. Démontrer

$$\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \leqslant (b - a) \cdot \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

2. Supposons f dérivable sur $[a, b]$. Démontrer

$$(b - a) \cdot f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leqslant \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t$$

EXERCICE TD25.10 (CARACTÉRISATION DE LA CONVEXITÉ D'UNE FONCTION DÉRIVABLE PAR LES TANGENTES)

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$.

1. Supposons f dérivable sur I. Démontrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad f(y) \geqslant f(x) + f'(x) \cdot (y - x).$$

2. Supposons à présent l'intervalle I ouvert. Si f est convexe (non nécessairement dérivable), démontrer que, pour tout $x \in I$, il existe $m_x \in \mathbf{R}$ tel que, pour tout $y \in I$

$$f(y) \geqslant f(x) + m_x \cdot (y - x).$$

   Étudier la réciproque.

EXERCICE TD25.11 (FONCTION CONVEXE, DIRECTION ASYMPTOTIQUE, BRANCHE PARABOLIQUE)

Soit $f : \mathbf{R}_{\geqslant 0} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe. Démontrer que $\dfrac{f(x)}{x}$ possède une limite dans $\overline{\mathbf{R}}$ quand x tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD25.12 (FONCTION CONVEXE, $\mathscr{C}^2$, POSITIVE, BORNÉE, DOMINÉE PAR SA DÉRIVÉE SECONDE)

Soit $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$, positive et bornée telle que $f \leqslant f''$.

1. Démontrer que f est convexe et décroissante.
2. Démontrer que f et f' tendent vers 0 en $+\infty$.
3. Soient les fonctions

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \big(f(x) + f'(x)\big) \cdot e^{-x} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \cdot e^{x} \end{array} \right.$$

   Étudier les variations de g et de h.

4. En déduire que pour tout $x \in \mathbf{R}^+$, $f(x) \leqslant f(0) \cdot e^{-x}$.

EXERCICE TD25.13 (log-CONVEXITÉ)
Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_{>0}$.

1. Supposons que $\ln(f)$ est convexe. Démontrer que f est convexe.
2. Démontrer que $\ln(f)$ est convexe si et seulement si, pour tout $\alpha > 0$, f^α est convexe. On pourra considérer, pour $(x, y, \lambda) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times]0,1[$ fixés, les fonctions

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & e^{t \cdot \ln(f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y))} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \cdot e^{t \cdot f(x)} + (1-\lambda) \cdot e^{t \cdot f(y)} \end{array} \right.$$

vérifier que $\varphi \leqslant \psi$, comparer $\varphi(0)$ et $\psi(0)$ et en déduire une inégalité entre $\varphi'(0)$ et $\psi'(0)$.

EXERCICE TD25.14 (FONCTION CONCAVE ET SOUS-ADDITIVITÉ)
Soit $f : \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}^+$ une fonction concave.

1. Démontrer que la fonction
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$
est décroissante.
2. Démontrer que, pour tout $(x, y) \in (\mathbf{R}_{>0})^2$
$$f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$$

EXERCICE TD25.15 (NOMBRE DE DROITES TANGENTE À LA COURBE D'UNE FONCTION CONVEXE DÉRIVABLE)
On fixe un repère du plan. Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction convexe dérivable, soit $M = (x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$. Quel est le nombre maximal de droites tangentes à la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f passant par M ?

EXERCICE TD25.16 (UNICITÉ DU POINT APPARAISSANT DANS LE THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS)
Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable telle que pour tout $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ tel que $a < b$, il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

1. Soit $a \in \mathbf{R}$. Posons
$$p_a \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array} \right.$$
Démontrer que p_a est monotone sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.
2. En déduire que f est strictement convexe ou strictement concave.

EXERCICE TD25.17 (CARACTÈRE $\mathscr{C}^1$ D'UNE FONCTION CONVEXE DÉRIVABLE)
Soit I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable.

1. Démontrer que pour tout $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$, $f'([a, b])$ est un intervalle (théorème de Darboux).
2. Supposons de plus f convexe. Démontrer que f' est continue sur I.

EXERCICE TD25.18 (CARACTÉRISATION DE LA CONVEXITÉ À L'AIDE DES MILIEUX, ORAL DE L'X))
Soient I un intervalle et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $(x, y) \in I^2$

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leqslant \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Démontrer que f est convexe.

EXERCICE TD25.19 ((CONVEXITÉ DE $x \longmapsto x \cdot f(x)$ VS. CONVEXITÉ DE $x \longmapsto f(1/x)$))
Soient I un intervalle de $\mathbf{R}_+^*$ et $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Démontrer que φ est convexe si et seulement si ψ est convexe, où

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \cdot f(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & f\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

Exercice TD25.20 (ENS)

Soit n un entier $\geqslant 2$. Soient n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ convexes continues sur $[0,1]$ telles que pour tout $x \in [0,1]$

$$\max\big(f_1(x), \ldots, f_n(x)\big) \geqslant 0$$

Démontrer qu'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbf{R}_+)^n$ tel que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$ et

$$\alpha_1 \cdot f_1 + \ldots + \alpha_n \cdot f_n \geqslant 0$$