FEUILLE D'EXERCICES N°24

MATRICES

EXERCICE TD24.1 (UNE MATRICE INVERSIBLE EST UNE MATRICE DE PASSAGE ENTRE DEUX BASES)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Démontrer qu'il existe une unique base $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}}$.

EXERCICE TD24.2 (FACTORISATION D'UNE MATRICE DE RANG 1)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que

$$\mathrm{Rg}(A) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\exists (X, Y) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\}\right)^2 \quad A = X \times Y^\top\right)$$

EXERCICE TD24.3 (REPRÉSENTATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE PAR UNE MATRICE DE JORDAN)

Soit

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^5 \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & (x_1 + x_2 \,,\, x_1 + x_2 + x_3 \,,\, x_1 + x_3 \,,\, x_1 + 2x_2 + 3x_3 \,,\, x_2 + x_3) \end{array} \right.$$

1. Justifier que u est une application linéaire.
2. Calculer le rang r de u.
3. Déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^3$ et une base $\mathscr{C}$ de $\mathbf{R}^5$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_{5,3}(r)$.

EXERCICE TD24.4 (ENDOMORPHISME D'UN ESPACE DE POLYNÔMES)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\left(P(X+1) + P(X-1)\right) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$.
2. Calculer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbf{R}_n[X]$.
3. Dans le cas où $n = 3$, démontrer que f est bijective de deux manières.

EXERCICE TD24.5 (MATRICE INVERSIBLE, SYSTÈME DE CRAMER ET CHANGEMENT DE BASE)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
2. Résoudre le système linéaire
$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & - & 12z & = & 2 \\ 2x & & & - & 8z & = & 4 \\ x & - & y & - & 2z & = & 6 \end{array} \right.$$
d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$.
3. On pose
$$u_1 := 3 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + e_3 \quad , \quad u_2 := 12 \cdot e_1 + 8 \cdot e_2 + e_3 \quad , \quad u_3 := 2 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2 + e_3$$
Démontrer que $\mathscr{C} := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E.
4. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = M$. Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.

Exercice TD24.6 (rang, base de l'image et noyau d'un endomorphisme)

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est et

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le rang de u.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(u)$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(u)$ en fonction des vecteurs de $\mathscr{B}$.
4. A-t-on $E = \mathrm{Ker}\,(u) \oplus \mathrm{Im}\,(u)$?

Exercice TD24.7 (projecteur d'un espace de dimension 3)

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, $(p, q, r) \in \mathbf{R}^3$ tel que $p^2 + q^2 + r^2 = 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} p^2 & p \cdot q & p \cdot r \\ p \cdot q & q^2 & q \cdot r \\ p \cdot r & q \cdot r & r^2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer u^2. Qu'en déduire ?
2. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{C}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Soit s la symétrie de E par rapport à $\mathrm{Im}\,(u)$, parallèlement à $\mathrm{Ker}\,(u)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(s)$, puis $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s)$.

Exercice TD24.8 (matrice d'une projection de $\mathbf{R}^2$ dans la base canonique)

Déterminer la matrice de la projection de $\mathbf{R}^2$ sur $\mathrm{Vect}\,((14, 2))$, parallèlement à $\mathrm{Vect}\,((2, 3))$, dans la base canonique.

Exercice TD24.9 (matrice d'une symétrie de $\mathbf{R}^3$ dans la base canonique)

Soient

$$P := \left\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x + 2y - z = 0\right\} \quad \text{et} \quad D := \mathrm{Vect}\,((1, 0, -1))$$

1. Démontrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$.
2. Soit s la symétrie vectorielle de $\mathbf{R}^3$, par rapport à P et parallèlement à D. Déterminer la matrice de s dans la base canonique.

Exercice TD24.10 (puissances d'une matrice)

Soient

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$ dont la matrice dans la base canonique est A. On pose

$$v_1 := (1, -2, 1) \quad , \quad v_2 := (0, -1, 1) \quad , \quad v_3 := (0, 0, 1)$$

1. Démontrer que $\mathscr{C} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer $B := \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)$.
3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, calculer B^n puis A^n.

EXERCICE TD24.11 (ENDOMORPHISME NILPOTENT, DE NILINDICE 2, D'UN ESPACE DE DIMENSION 3)

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \neq 0$ et $f^2 = 0$. Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE TD24.12 (TRIGONALISATION)

Soit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que A est semblable à
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
2. On pose $B = D + N$, avec D diagonale et N nilpotente.
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, D^n, N^n, B^n et A^n.

EXERCICE TD24.13 (CALCUL DE RANG)

Calculer le rang de

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

EXERCICE TD24.14 (RÉDUCTION ET CENTRALISATEUR D'UN ENDOMORPHISME NILPOTENT DE NILINDICE MAXIMAL)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 2$ et f un endomorphisme de E tel que

$$f^n = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f^{n-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$$

1. Justifier qu'il existe un vecteur x de E tel que la famille
$$\mathscr{B} := \left(x, f(x), f^2(x), \ldots, f^{n-1}(x)\right)$$
est une base de E.
2. Déterminer les matrices de $f, f^2, \ldots, f^{n-1}$ dans la base $\mathscr{B}$.
3. On note $\mathscr{C}(f)$ le centralisateur de f dans $\mathscr{L}(E)$ défini par
$$\mathscr{C}(f) := \left\{g \in \mathscr{L}(E) \ : \ f \circ g = g \circ f\right\}$$
Démontrer $\mathscr{C}(g) := \mathrm{Vect}\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \ldots, f^{n-1}\right)$.

EXERCICE TD24.15 (MATRICE NON INVERSIBLE VS. MATRICE ÉQUIVALENTE À UNE MATRICE NILPOTENTE)

Soit un entier $n \geqslant 2$.

1. Démontrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est non inversible si et seulement si elle est équivalente à une matrice nilpotente.
2. Soit une application $f : \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \longrightarrow \mathbf{K}$ telle que $f\left(0_{\mathscr{M}_n(\mathbf{K})}\right) = 0_{\mathbf{K}}$, $f(I_n) \neq 0_{\mathbf{K}}$ et
$$\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2 \quad f(AB) = f(A) \cdot f(B)$$
Démontrer que A est inversible si et seulement si $f(A) \neq 0_{\mathbf{K}}$

Exercice TD24.16 (groupe multiplicatif inclus dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$)
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit G une partie de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ stable par produit telle que $(G, \times)$ est un groupe. Démontrer que tous les éléments de G ont même rang.

Exercice TD24.17 (matrice de rang 1)
Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice de rang 1. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A^2 = \lambda \cdot A$.

Exercice TD24.18 (factorisation $A = AMA$)
Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Démontrer qu'il existe $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$ tel que $A = AMA$.

Exercice TD24.19 (de l'existence d'un crochet de Lie valant I_n)
Soit un entier $n \geqslant 2$. Existe-t-il un couple $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$?

Exercice TD24.20 (trace d'une matrice A vs. trace de la multiplication à droite par A)
Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On note φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ défini par

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ M & \longmapsto & MA \end{array} \right.$$

Exprimer la trace de φ en fonction de la trace de A.

Exercice TD24.21 (de la classe de similitude d'une matrice de trace nulle)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de trace nulle. Démontrer que A est semblable à une matrice dont tous les coefficients diagonaux sont nuls.

Exercice TD24.22 (représentation d'une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$)
Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), \mathbf{K})$. Démontrer qu'il existe $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$\forall\, M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad \varphi(M) = \mathrm{Tr}\,(AM)$$

Exercice TD24.23 (une équation matricielle mettant en jeu la trace)
Soient un entier $n \geqslant 2$ et $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})^2$. Résoudre l'équation

$$M = \mathrm{Tr}\,(M) \cdot A + B$$

d'inconnue $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice TD24.24 (endomorphisme d'un espace de polynômes et racines de l'unité)
Soient un entier $n \geqslant 2$, $\omega := \exp\left(i \cdot \dfrac{2pi}{n}\right)$ et F l'application définie par

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{C}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{C}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}\left(\omega^k\right) \cdot X^k \end{array} \right.$$

Démontrer que F est un automorphisme de $\mathbf{C}_{n-1}[X]$, puis exprimer son inverse.

Exercice TD24.25 (deux endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ nilpotents qui commutent)
Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbf{R}^2$ tels que

$$f^2 = g^2 = 0_{\mathscr{L}(E)} \quad \text{et} \quad f \circ g = g \circ f$$

Calculer $f \circ g$.