FEUILLE D'EXERCICES N°23

PROBABILITÉS

EXERCICE TD23.1 (PRODUIT DES CHIFFRES D'UN NOMBRE À 8 CHIFFRES)

On écrit au hasard un nombre N de 8 chiffres (0 compris) en base 10.

1. Quelle est la probabilité que le produit des chiffres de N soit pair ?
2. Quelle est la probabilité que le produit des chiffres de N soit divisible par 3 ?

EXERCICE TD23.2 (PARITÉ DANS DEUX CLASSES PRÉPA)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Dans un lycée contenant deux classes prépas A et B, $2n$ garçons et $2n$ filles sont inscrits dans cette filière. Quelle est la probabilité que chaque classe comporte autant de filles que de garçons ?

EXERCICE TD23.3 (TIRAGES STRICTEMENT CROISSANTS ET TIRAGES CROISSANTS)

Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 3. Dans une urne, on place n boules numérotées de 1 à n. On tire successivement, sans remise, au hasard, trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité que les trois nombres obtenus soient dans l'ordre croissant au sens strict ?
2. Quelle est la probabilité que les trois nombres obtenus soient dans l'ordre croissant au sens large ?

EXERCICE TD23.4 (QUATRE TIRAGES DE BOULES SUCCESSIFS DANS UNE URNE DONT LA COMPOSITION ÉVOLUE)

Soient n un entier naturel non nul et b un nombre entier supérieur ou égal à 4. On place b boules blanches et n boules noires dans une urne. On tire ensuite successivement 4 boules. À chaque tirage

- si on tire une boule noire, on l'enlève ;
- si on tire une boule blanche, on la retire, et on ajoute une boule noire à la place.

Quelle est la probabilité de tirer 4 boules blanches à la suite ?

EXERCICE TD23.5 (MAGASIN DE JEUX VIDÉO)

Un magasin possède un stock de cartons de jeux vidéos. Parmi ceux-ci, 5% sont abîmés, 60% des cartons abîmés contiennent au moins un jeu défectueux et 98% des cartons en bon état ne contiennent aucun jeu défectueux. Un client achète un carton du lot. On considère les deux événements

$$A := \text{« le carton acheté est abîmé »} \quad \text{et} \quad D := \text{« le carton acheté contient au moins un jeu défectueux »}$$

1. Calculer $P(A)$, $P\left(\overline{A}\right)$, $P(D\,|\,A)$, $P\left(D\,|\,\overline{A}\right)$, $P\left(\overline{D}\,|\,A\right)$ et $P\left(\overline{D}\,|\,\overline{A}\right)$.
2. Calculer $P(D)$.
3. Le client constate qu'un des jeux est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté un carton abîmé ?

EXERCICE TD23.6 (TEST D'UNE MALADIE)

Une personne venant aux urgences d'un hôpital a une probabilité 0,3 d'être atteint d'une maladie M. À son arrivée, elle subit un test T. Si elle n'est pas atteinte de M, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative. Si elle est atteinte de M, 8 fois sur 10 la réponse au test est positive.

1. Si la résultat du test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit malade ?
2. Quelle est cette probabilité si le test est négatif ?

EXERCICE TD23.7 (SOMME DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES DE LOIS BINOMIALES)

Soit $p \in]0,1[$ et soient $(n,m) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(m,p)$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = X + Y$.

EXERCICE TD23.8 (3 TIRAGES SUCESSIFS DE TROIS BOULES DANS UNE URNE, SANS REMISE)

Une urne contient 10 boules : 4 blanches, 3 bleues et 3 rouges. On tire au hasard 3 fois de suite 3 boules, sans remise. Pour tout $i \in [\![1, T]\!]$, on note T_i l'évènement défini par

$$T_i := \text{« le } i\text{-ème tirage est tricolore »}$$

et on note R l'évènement défini par

$$R := \text{« la boule qui reste après les 3 tirages est blanche »}$$

On admet que $P(R) = 4/10$.

1. Calculer $P(T_1)$, puis $P(T_2 \mid T_1)$. En déduire $P(T_1 \cap T_2)$.
2. Calculer de même $P(T_1 \cap T_2 \cap T_3)$.
3. Quel lien peut-on trouver entre $T_1 \cap T_2 \cap T_3)$ et R ?
4. Sachant R réalisé, quelle est la probabilité que les 3 tirages aient été tricolores ?

EXERCICE TD23.9 (TRANSMISSION D'UNE INFORMATION)

Soit $N \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. N personnes numérotées de 1 à N se transmettent dans cet ordre une information binaire. Chaque personne transmet l'information contraire avec une probabilité p. Pour tout $n \in [\![1, n]\!]$, on note A_n l'évènement défini par

$$A_n := \text{« la } n\text{-ième personne reçoit l'information non déformée »}$$

et on pose $p_n = P(A_n)$.

1. Calculer p_1 et, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, $P(A_{n+1} \mid A_n)$ et $P\left(A_{n+1} \mid \overline{A_n}\right)$.
2. Démontrer, pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$, $p_{n+1} = p_n \cdot (1-p) + (1-p_n) \cdot p$.
3. En déduire, pour tout $n \in [\![1, n]\!]$, une expression de p_n en fonction de n.
4. Étudier la limite éventuelle de p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD23.10 (CHEMINS POUR SE RENDRE AU LYCÉE)

Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre les itinéraires A, B, C et D. La probabilité qu'il a de choisir A est $1/3$, contre $1/4$ pour B et $1/12$ pour C. La probabilité d'arriver en retard en empruntant A est $1/20$, contre $1/10$ pour B et $1/5$ pour C. En empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
2. Il arrive en retard. Quelle est la probabilité que l'élève ait choisi l'itinéraire C ?

EXERCICE TD23.11 (TIRAGES SUCCESSIFS DANS UNE URNE, AVEC REMISE)

Une urne contient une boule rouge et une boule noire. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On tire n fois une boule en la remettant après avoir noté sa couleur. On note A_n et B_n les évènements définis par

$A_n :=$ « on obtient des boules des deux couleurs au cours des n tirages » et $B_n :=$ « on obtient au plus une boule noire »

1. Calculer $P(A_n)$ et $P(B_n)$.
2. Les évènements A_2 et B_2 sont-ils indépendants ?
3. Les évènements A_3 et B_3 sont-ils indépendants ?

EXERCICE TD23.12 (FORMULES DE BAYES ET DÉS PIPÉS)

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 vaut $1/2$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On le lance et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés et on le lance n fois. On obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que le dé soit pipé ?
3. Déterminer la limite de la suite (p_n). Interpréter le résultat.

Exercice TD23.13 (appels téléphoniques)

Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. Une personne effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On suppose que les n appels constituent n expériences aléatoires indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité que le correspondant réponde vaut $p \in]0,1[$. Notons X la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants ayant répondu.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La personne rappelle une deuxième fois les $n - X$ correspondants qui n'ont pas répondu au premier appel. On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de correspondants joints au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer $P(Y = k \mid X = n-i)$, pour tout $k \in [\![0,i]\!]$.
   (b) Montrer que la loi $Z = X + Y$ suit une loi binomiale donc on déterminera les paramètres.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de la variable Z.

Exercice TD23.14 (modèle d'urne avec gain de points)

Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne. Pour chaque boule blanche, il gagne deux points, pour chaque boule noire, il perd trois points. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches tirées, et Y la variable aléatoire donnant le nombre de points du joueur.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X, son espérance, sa variance.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y, son espérance, sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que les tirages se font sans remise.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire X.
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

Exercice TD23.15 (rangement de boules dans trois boîtes)

Soit $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques numérotées de 1 à 3 pouvant chacune contenir n boules. On lance simultanément les n boules. Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments. On note X la variable aléatoire qui, à chaque expérience, associe le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. Déterminer $P(X = 2)$ puis donner la loi de X.
3. Calculer $E(X)$. Déterminer la limite de $E(X)$ quand n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

Exercice TD23.16 (tirage dans une urne parmi plusieurs et loi conditionnelle)

Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Soit k urnes $\mathscr{U}_1, \dots, \mathscr{U}_k$. Pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, l'urne $\mathscr{U}_i$ contient i boules blanches et $k - i$ boules noires. On choisit une urne au hasard, de laquelle on tire une boule.

Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne sachant que la boule tirée est blanche.

1. Déterminer la loi de X. On pourra introduire la variable aléatoire U égale au numéro de l'urne dans laquelle on a tiré la boule.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice TD23.17 (modèles d'urnes et tirages enchaînés)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient 2 boules blanches et 3 boules noires. L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient. Si la boule était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon, le tirage se fait dans l'urne U_2. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note B_n l'événement défini par

$$B_n := \text{« la boule tirée au } n\text{-ème tirage est blanche »}$$

on note $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} \cdot p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire la valeur de p_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice TD23.18 (stock de plantes)

Un commerçant dispose d'un stock de plantes. Chacune des plantes fleurit une fois par an. Pour chaque plante, la première année, la probabilité de donner une fleur rose est de $3/4$, celle de donner une fleur blanche est de $1/4$. Puis, les années suivantes, pour tout entier naturel n, on a

- si l'année n, la plante a donné une fleur rose, alors l'année $n+1$, elle donnera une fleur rose ;
- si l'année n, la plante a donné une fleur blanche, alors l'année $n+1$, elle donnera de façon équiprobable une fleur rose ou une fleur blanche.

On note p_n la probabilité de l'évènement « la plante a donné une fleur rose l'année n ».

1. Démontrer que pour tout entier naturel n
$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot p_n + \frac{1}{2}$$
2. En déduire une expression de p_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.
3. Étudier la limite éventuelle de la suite $(p_n)_{n \in \mathbf{N}}$.
4. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs roses pendant les n premières années ?
5. Quelle est la probabilité que la plante ne donne que des fleurs blanches pendant les n premières années ?

Exercice TD23.19 (roue de la fortune à la fête foraine et gain)

Un forain possède deux roues séparées en 10 secteurs égaux. Sur la première roue il y a 3 secteurs rouges et 7 blancs et sur la deuxième, 1 vert et 9 blancs. Un joueur lance les deux roues en même temps. Les gains sont distribués de la façon suivante

- 3 euros si la première roue tombe sur le secteur rouge et la deuxième sur le secteur vert ;
- 1 euro si une seule des deux roues tombe sur un secteur blanc ;
- 0,5 euro si les deux roues tombent sur des secteurs blancs.

1. Soit G la variable aléatoire égale au gain obtenu.
   (a) Déterminer la loi de G.
   (b) Calculer l'espérance de G.
2. Le forain demande une mise initiale de m euros. On note X la variable aléatoire égale au bénéfice du forain.
   (a) Donner une relation entre X, G et m.
   (b) Déterminer la mise minimale que doit exiger le forain pour que son bénéfice moyen soit d'au moins 25 centimes d'euro par partie.

Exercice TD23.20 (espérance de l'inverse du chiffre amené par un dé truqué)

On lance un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6. La probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer l'espérance de X.
3. Déterminer la variance de X.
4. Déterminer $E\left(\frac{1}{X}\right)$.

Exercice TD23.21 (déplacement sur une droite)

On considère un point M se déplaçant sur un axe d'origine O, en partant de O et par saut d'une unité vers la droite avec probabilité p et vers la gauche avec probabilité q ($p \in]0,1[$ et $p+q=1$), les sauts étant supposés indépendants. Le point M fait n sauts ($n \in \mathbf{N}^*$).

1. Soit Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts vers la droite. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Soit X_n la variable aléatoire égale à l'abscisse du point M après les n sauts.
   (a) Exprimer X_n en fonction de Y_n.
   (b) Déterminer $X_n(\Omega)$.
   (c) Donner la loi de X_n, son espérance et sa variance.
3. Quelle est la probabilité que le point M soit revenu à l'origine après les n sauts ?

Exercice TD23.22 (compteur truqué)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $p \in]0,1[$. On note X une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$. Les résultats de X sont affichés sur un compteur défectueux.

- Si $X(\omega) \neq 0$, alors le compteur affiche $X(\omega)$.
- Si $X(\omega) = 0$, alors le compteur affiche un nombre entier au hasard entre 1 et n.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre affiché sur le compteur.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Calculer $E(Y)$.
3. Montrer que $E(Y) \geqslant E(X)$.

Exercice TD23.23 (tirages successifs avec remise d'objets dans une boîte parmi trois et gain)

On dispose d'une boîte contenant trois objets appelés A, B et C. Un jeu consiste en une succession de tirages d'un objet, avec remise dans la boîte après chaque tirage. À chaque tirage, le joueur gagne un euro s'il tire l'objet A, ne gagne ni ne perd rien s'il tire l'objet B et perd ce qu'il a gagné précédemment s'il tire l'objet C. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au gain du joueur, à l'issue de n tirages.

1. Déterminer les lois de X_1 et de X_2.
2. Calculer $P(X_n = n)$ en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.
3. Exprimer $P(X_{n+1} = 0)$ en fonction de $P(X_n = 0)$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et en déduire la valeur de $P(X_n = 0)$ en fonction de n.
4. Soient a et n deux entiers naturels non nuls. Montrer l'égalité suivante :
$$P(X_{n+1} = a) = \frac{1}{3} \cdot P(X_n = a) + \frac{1}{3} \cdot P(X_n = a-1).$$
5. Trouver une relation entre $E(X_n)$ et $E(X_{n+1})$, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, et exprimer $E(X_n)$ en fonction de $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice TD23.24 (loterie et gain)

Soient $(n_1, n_2) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ et soit $r \in \mathbf{N}$. Une urne contient n_1 tickets GAGNÉ, n_2 tickets PERDU, r tickets REJOUER. On tire successivement, sans remise, des tickets jusqu'à tirer un ticket GAGNÉ ou un ticket PERDU. Si le dernier ticket tiré est un ticket GAGNÉ, on dit que l'on a gagné, sinon que l'on a perdu. On note :

- G_1 l'événement « tirer un ticket GAGNÉ au 1er tirage » ;
- P_1 l'événement « tirer un ticket PERDU au 1er tirage » ;
- R_1 l'événement « tirer un ticket REJOUER au 1er tirage ».

Soit p_r la probabilité de gagner pour une urne contenant initialement r tickets REJOUER.

1. Calculer p_0 et p_1.
2. Que dire de (G_1, P_1, R_1) ?
3. Donner une relation de récurrence entre p_{r+1} et p_r pour tout $r \in \mathbf{N}$.
4. Démontrer par récurrence que la valeur de p_r est indépendante de r.

Exercice TD23.25 (la somme des chiffres amenés par deux dés ne peut suivre une loi uniforme)

Démontrer que l'on ne peut pas truquer deux dés pour que la variable S égale à la somme des chiffres amenés par les deux dés suive la loi $\mathscr{U}([\![2,12]\!])$.

Exercice TD23.26 (asymptotique de la probabilité maximale pour une loi binomiale)

Soit X une variable aléatoire binomiale de paramètres $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$. On pose, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$
$$b(k,n,p) = P(X = k)$$

1. Pour quelle valeur m de k, le coefficient $b(k,n,p)$ est-il maximal ?
2. Étudier la monotonie de la fonction
$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^m \cdot (1-x)^m \end{array} \right.$$
3. Vérifier que, si $m \in [\![n \cdot p, (n+1) \cdot p]\!]$, alors
$$b\left(m, n, \frac{m}{n+1}\right) \leqslant b(m,n,p) \leqslant b\left(m, n, \frac{m}{n}\right)$$

4. Proposer en encadrement analogue pour $m \in [\![(n+1)\cdot p - 1, n\cdot p]\!]$
5. Donner un équivalent simple de $b(m, n, p)$, lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD23.27 (DEUX TIRS D'UN ARCHER ET CONDITIONNEMENT D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI BINOMIALE)
Soit $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$. Un archer tire sur n cibles. À chaque tir, il a la probabilité p de toucher la cible et les tirs sont supposés indépendants. Il tire une première fois sur chaque cible et on note X le nombre de cibles atteintes lors de ce premier jet. L'archer tire ensuite une seconde fois sur les cibles restantes et l'on note Y le nombre de cibles touchées lors de cette tentative. Déterminer la loi de la variable $Z = X + Y$.

EXERCICE TD23.28 (MAXIMUM DE DEUX VARIABLES ALÉATOIRES DE BERNOULLI INDÉPENDANTES ET LOI BINOMIALE)
Soient $(n, p, q) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[\times]0,1[$.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli de paramètres p et q. Déterminer la loi de la variable $Z = \max(X, Y)$.
2. Deux archers tirent indépendamment sur n cibles. À chaque tir, le premier archer a la probabilité p de toucher, le second la probabilité q.
   (a) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles touchées au moins une fois ?
   (b) Quelle est la loi suivie par le nombre de cibles épargnées ?

EXERCICE TD23.29 (LANCERS D'UNE PIÈCE)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces ?

EXERCICE TD23.30 (DEUX VARIABLES ALÉATOIRES INDÉPENDANTES SUIVANT UNE LOI UNIFORME)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. Déterminer $P(X = Y)$.
2. Déterminer $P(X \geqslant Y)$.
3. Déterminer la loi de $X + Y$.

EXERCICE TD23.31 (MAXIMUM ET MINIMUM DES NUMÉROS DE BOULES TIRÉES DANS UNE URNE)
Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On en tire n en effectuant des tirages avec remise. On note X et Y le plus petit et le plus grand des nombres obtenus. Déterminer la loi de X et la loi de Y.

EXERCICE TD23.32 (LOI MARGINALE)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

EXERCICE TD23.33 (LOI CONJOINTE UNIFORME)
Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]^2$.

1. Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X + Y$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

EXERCICE TD23.34 (INÉGALITÉ DE BONFERRONI)
Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini, $n \in \mathbf{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_n$ des événements. Démontrer que

$$P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \right) - (n-1)$$

Exercice TD23.35 (fonction génératrice)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour toute X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,n]\!]$, on appelle fonction génératrice la fonction définie par

$$G_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k x^k \end{array} \right.$$

où, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $p_k = P(X=k)$.

1. Soit $p \in]0,1[$. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
2. Soit $p \in]0,1[$. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
3. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
4. Démontrer que
$$E(X) = G_X'(1) \quad \text{et} \quad V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - \left(G_X'(1)\right)^2$$
Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
5. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
6. Soit $(m,p) \in \mathbf{N}^* \times]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$. Quelle est la loi de $Z = X+Y$?

Exercice TD23.36 (indépendance imposible)

On suppose qu'on a un espace probabilisé fini tel que l'univers Ω est un ensemble fini de cardinal un nombre premier p et que le modèle choisi soit celui de l'équiprobabilité. Prouver que deux événements A et B non triviaux (différents de $\varnothing$ et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

Exercice TD23.37 (indicatrice d'Euler)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On choisit de manière équiprobable un entier x dans $[\![1,n]\!]$. Pour tout entier $m \in [\![1,n]\!]$, on note A_m l'événement défini par

$$A_m := \text{« } m \text{ divise } x \text{ »}$$

et B l'événement défini par

$$B := \text{« } x \text{ est premier avec } n \text{ »}$$

Enfin, on note $p_1, \dots, p_r$ les diviseurs premiers distincts de n.

1. Exprimer B en fonction des A_{p_k} ($k \in [\![1,r]\!]$).
2. Pour tout entier naturel m qui divise n, calculer la probabilité de A_m.
3. Démontrer que les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_r}$ sont indépendants.
4. En déduire la probabilité de B.
5. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers compris entre 1 et n qui sont premiers avec n. Démontrer que
$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \qquad [\text{formule pour l'indicatrice d'Euler}]$$

Exercice TD23.38 (probabilité d'être un tricheur)

Vous jouez à pile ou face avec un autre joueur. Il parie sur pile, lance la pièce, et obtient pile. Quelle est la probabilité pour qu'il soit un tricheur ?

Exercice TD23.39 (de la moyenne de aléatoires indépendantes et de même loi)

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles, définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, P), indépendantes, et de même loi. On note m leur espérance et σ^2 leur variance.

1. Calculer l'espérance et la variance de $X = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} X_k$.
2. Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{n-1} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (X_i - X)^2$.

Exercice TD23.40 (fonction de répartition)

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. La fonction de répartition de X est la fonction notée F_X définie par

$$F_X \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & P(X \leqslant x) \end{array} \right.$$

1. Déterminer la fonction F_X lorsque $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1, 4 \rrbracket)$, puis la représenter graphiquement.
2. Démontrer que la fonction F_X est croissante.
3. Étudier les limites éventuelles de F_X en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Que dire de la restriction de F_X à un segment de $\mathbf{R}$?
5. Exprimer l'espérance $E(X)$ de X à l'aide de sa fonction de répartition.
6. Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire. Démontrer que X et Y sont égales en loi si et seulement si leurs fonctions de répartition F_X et F_Y sont égales.

Exercice TD23.41 (nombre de points fixes d'une permutation)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On munit S_n de la probabilité uniforme. Pour toute permutation $\sigma \in S_n$, notons $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. Déterminer l'espérance et la variance de X.

Exercice TD23.42 (min et du max de deux variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme)

Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Exprimer $E(X)$ en fonction des $P(X \geqslant k)$, $k \in \mathbf{N}$.
2. On suppose les variables aléatoires X et Y de loi uniforme. Déterminer l'espérance de $\min(X, Y)$, de $\max(X, Y)$ puis de $|X - Y|$.

Exercice TD23.43 (matrice des covariances)

Soient (Ω, P) un espace de probabilité fini, $n \geqslant 2$ et

$$X_1 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad X_2 : \Omega \longrightarrow \mathbf{R} \quad , \quad \ldots \quad , \quad X_n : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$$

des variables aléatoires. On considère la matrice $M := \left(Cov(X_i, X_j) \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1. Que dire de la matrice M si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes ?
2. Démontrer que, pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, $X^\top M X \geqslant 0$.
3. Soit $\lambda \in \mathbf{R}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \left\{ 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \right\}$ vérifiant $MX = \lambda X$ (λ est appelée valeur propre réelle de la matrice M). Démontrer que $\lambda \geqslant 0$.

Exercice TD23.44 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soient (Ω, P) un espace de probabilité fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$, $Y : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ deux variables aléatoires. Démontrer que

$$|E(X) \cdot E(Y)| \leqslant \sqrt{E\left(X^2\right)} \cdot \sqrt{E\left(Y^2\right)}$$

Exercice TD23.45 (bornes pour l'espérance et la variance)

Soient (Ω, P) un espace de probabilité fini, et $X : \Omega \longrightarrow \mathbf{R}$ une variable aléatoire dont la variance est notée m et la variance σ^2. On pose

$$a := \min_\Omega X \quad , \quad b := \max_\Omega X \quad , \quad Y := X - m \quad , \quad t := \sum_{y \in Y(\Omega) \cap \mathbf{R}_+} y \cdot P(Y = y) \quad , \quad s := \sum_{y \in Y(\Omega) \cap \mathbf{R}_+} y^2 \cdot P(Y = y) \quad , \quad u := P(Y \geqslant 0)$$

1. Montrer que $m \in [a, b]$.
2. Démontrer que $t^2 \leqslant s \cdot u$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y. En déduire que $t^2 \leqslant \left(\sigma^2 - s\right) \cdot (1 - u)$.
4. Démontrer $t^2 \leqslant \dfrac{\sigma^2}{4}$.
5. Conclure que $\sigma^2 \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice TD23.46 (entropie de Shannon)

Soient (Ω, P) un espace de probabilité fini et X une variable aléatoire définie sur Ω, dont les valeurs sont notées $x_1, \ldots, x_n$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $p_i := P(X = x_i)$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) := -\sum_{i=1}^{n} p_i \cdot \ln\left(p_i\right)$$

avec la convention $x \cdot \ln(x) = 0$ si $x = 0$ (ce qui correspond au prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto x \cdot \ln(x)$).

1. Démontrer que $H(X) \geqslant 0$.
2. Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante (i.e. il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $p_i = 1$).
3. Vérifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$
$$-(n \cdot p_k) \cdot \ln(n \cdot p_k) \leqslant 1 - n \cdot p_k$$
avec égalité si et seulement si $n \cdot p_k = 1$.
4. En déduire que $H(X) \leqslant \ln(n)$.
5. Démontrer que $H(X) = \ln(n)$ si et seulement si $X \sim \mathcal{U}(\{x_1, \ldots, x_n\})$.