Feuille d'exercices n°22

Dénombrement

Exercice TD22.1 (finitude d'une image directe/réciproque d'une partie de la source/du but)

Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Si A est une partie finie de E, $f(A)$ est-elle nécessairement une partie finie de F ?
2. Si $f(A)$ est une partie finie de F, $f(A)$ est-elle nécessairement une partie finie de E ?
3. Si B est une partie finie de F, $f^{-1}(B)$ est-elle nécessairement une partie finie de E ?
4. Si $f^{-1}(B)$ est une partie finie de E, B est-elle nécessairement une partie finie de F ?

Exercice TD22.2 (une formule de crible)

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble fini E. Démontrer

$$\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$$

Exercice TD22.3 (partition à deux éléments)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.

1. Soit X une partie de E possèdant p éléments. Combien y a-t-il de parties de E disjointes de X ?
2. Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \sqcup Y = E$?

Exercice TD22.4 (union de deux parties égale à l'ensemble)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \cup Y = E$?

Exercice TD22.5 (intersection de deux parties égale à un singleton)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y$ est un singleton ?

Exercice TD22.6 (intersection de deux parties égale à une partie donnée)

Soient E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$ et A une partie de E de cardinal p.

1. Combien y a-t-il de parties de E contenant A ?
2. Combien y a-t-il de parties de E de cardinal $m \in [\![p, n]\!]$ contenant A ?
3. Combien y a-t-il de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y = A$?

Exercice TD22.7 (somme des cardinaux de toutes les parties et variante)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. Calculer

$$\sum_{A \in \mathscr{P}(E)} \text{Card}(A) \quad \text{et} \quad \sum_{(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2} \text{Card}(A \cap B)$$

Exercice TD22.8 (relations)

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$.

1. Combien y a-t-il de relations sur E ?
2. Combien y a-t-il de relations réflexives sur E ?
3. Combien y a-t-il de relations réflexives et antisymétriques sur E ?
4. Combien existe-t-il de relation d'ordre total sur E ?

Exercice TD22.9 (formule du multinôme)
Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif.

1. Soit $(a, b, c) \in A^3$. Quel est le coefficient de $a^2b^5c^3$ dans le développement de $(a+b+c)^{10}$?
2. Soient $p \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $(a_1, a_2, \dots, a_p) \in A^p$.
   (a) Soit $(k_1, k_2, \dots, k_p) \in \mathbf{N}^p$ tel que $k_1+k_2+\dots+k_p = n$. Quel est le coefficient de $a_1^{k_1}a_2^{k_2}\dots a_p^{k_p}$ dans le développement de $(a_1+a_2+\dots+a_p)^n$?
   (b) En déduire une formule pour le développement de $(a_1+a_2+\dots+a_p)^n$.

Exercice TD22.10 (cartes)
Cinq cartes d'un jeu de cinquante deux sont distribuées à un joueur.

1. Combien y a-t-il de mains possibles ?
2. Combien de ces mains comportent exactement un as ?
3. Combien de ces mains ne comportent aucun as ?
4. Combien de ces mains comportent au moins un as ?

Exercice TD22.11 (anagrammes)
Un mot M de n lettres est constitué de r lettres $L_1, L_2, \dots, L_r$ différentes. Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on note p_j le nombre de fois où apparaît la lettre L_j.

1. Que vaut la somme $p_1+p_2+\dots+p_r$?
2. Combien d'anagrammes du mot M peut-on former ?

Exercice TD22.12 (formule de Vandermonde ou des comités pour les coefficients binomiaux)
Soient $(p, q) \in \mathbf{N}^2$ et $n \in [\![0, p+q]\!]$. Proposer une démonstration combinatoire de l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} \qquad \text{[formule de Vandermonde ou des comités]}$$

Exercice TD22.13 (suites finies croissantes)
Soient $(n, p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

1. Combien existe-t-il de suites strictement croissantes de p-entiers de $[\![1, n]\!]$?
2. Combien existe-t-il de p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbf{N}^*$ tels que $x_1+x_2+\dots+x_p \leqslant n$?
3. Combien existe-t-il de p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ d'éléments de $\mathbf{N}^*$ tels que $x_1+x_2+\dots+x_p = n$?
4. Combien existe-t-il de suites croissantes de p-entiers de $[\![1, n]\!]$?

Exercice TD22.14 (dérangements)
Si $n \in \mathbf{N}^*$, une permutation de $[\![1, n]\!]$ telle que

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!] \quad \sigma(k) \neq k$$

est appelé dérangement de $[\![1, n]\!]$. On note d_n le nombre de dérangements de $[\![1, n]\!]$. Par convention, on pose $d_0 := 1$.

1. Démontrer
$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$$
2. En déduire que
$$\forall\, n \in \mathbf{N} \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k!$$

Exercice TD22.15 (formule du capitaine pour les coefficients binomiaux)

Démontrer

$$\forall\, n \in \mathbf{N}^* \quad \forall\, k \in [\![1, n]\!] \quad k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{[formule du capitaine]}$$

Exercice TD22.16 (formule des colonnes pour les coefficients binomiaux)

Démontrer

$$\forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad \forall\, n \in \mathbf{N}_{\geqslant p} \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \qquad \text{[formule des colonnes]}$$