FEUILLE D'EXERCICES N°21

INTÉGRATION

EXERCICE TD21.1 (UNIFORME CONTINUITÉ)

Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array} \right.$$

n'est pas uniformément continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

EXERCICE TD21.2 (UNIFORME CONTINUITÉ)

Démontrer que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x \cdot \ln(x) \end{array} \right.$$

est uniformément continue sur $]0,1]$.

EXERCICE TD21.3 (UNIFORME CONTINUITÉ ET CARACTÈRE BORNÉ)

Soit une fonction $f\colon\ ]0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction uniformément continue. Démontrer que f est bornée.

EXERCICE TD21.4 (CONTINUITÉ PAR MORCEAUX)

La fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } t = 0 \\ \sin\left(\dfrac{1}{t}\right) & \text{si } t > 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est-elle continue par morceaux?

EXERCICE TD21.5 (SUITE D'INTÉGRALES)

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$I_n := \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+n}\, \mathrm{d}x$$

Étudier le comportement asymptotique des suites $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(n \cdot I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$

EXERCICE TD21.6 (DÉTERMINATION D'UNE FONCTION)

Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que

(i) f est continue sur $[a,b]$ (ii) $|f(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in [a,b]$ (iii) $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = b - a$

Déterminer f.

EXERCICE TD21.7 (INTÉGRALES DU CARRÉ, DU CUBE ET DE LA PUISSANCE QUATRIÈME)

Soit une fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ continue, telle que

$$\int_0^1 f^2(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f^3(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^1 f^4(x)\, \mathrm{d}x$$

Démontrer que $f = 0$ ou $f = 1$. On pourra s'intéresser à $\left(f^2 - f\right)^2$.

Exercice TD21.8 (calcul d'une intégrale)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_1^2 \ln(x)\ \mathrm{d}x$$

puis la calculer.

Exercice TD21.9 (calcul d'une intégrale)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\ \mathrm{d}t$$

puis la calculer.

Exercice TD21.10 (calcul d'une intégrale)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan(x))\ \mathrm{d}x$$

puis la calculer.

Exercice TD21.11 (calcul de primitives)

Calculer une primitive de la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-\infty,-1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{array} \right.$$

Exercice TD21.12 (calcul récursif d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n := \int_0^1 x^n \cdot e^{-x}\ \mathrm{d}x$$

Calculer I_0, I_1, I_2, puis proposer un mode de calcul récursif de I_n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

Exercice TD21.13 (intégration polynôme fois cosinus)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(x^2 - x\right) \cos(nx)\ \mathrm{d}x$$

puis la calculer.

Exercice TD21.14 (intégration par parties)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \left(x^3 + 1\right) \arctan(x)\ \mathrm{d}x$$

puis la calculer.

Exercice TD21.15 (intégration par parties)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)\ \mathrm{d}t$$

puis la calculer.

Exercice TD21.16 (intégration par parties)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{1/2} \arcsin(t)\ \mathrm{d}t$$

puis la calculer.

Exercice TD21.17 (primitives d'une fonction rationnelle)

Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{x^2}{x^3+x^2+x+1}$$

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer une primitive de f sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice TD21.18 (primitives d'une fonction rationnelle)

Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{x^3-1}$$

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer une primitive de f sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice TD21.19 (intégration par parties)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose

$$I_n := \int_0^1 \frac{1}{(x^2+1)^n}\,\mathrm{d}x$$

1. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
2. En déduire la valeur de I_3.

Exercice TD21.20 (changement de variable)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_1^e \frac{\ln^n(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

puis la calculer.

Exercice TD21.21 (changement de variable)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{3}} \arcsin\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

puis la calculer.

Exercice TD21.22 (changement de variable et fonction rationnelle)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$$

puis la calculer.

Exercice TD21.23 (changement de variable et fonction rationnelle)

Soit f la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \frac{\mathrm{ch}(x)-1}{\mathrm{ch}(x)+1}\cdot e^x$$

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer une primitive de f sur $\mathscr{D}_f$.

Exercice TD21.24 (changement de variable et fonction rationnelle)

Soit f la fonction définie par

$$f : x \mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(x)\,(1+\mathrm{sh}(x))}$$

1. Préciser le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.
2. Calculer une primitive de f sur $\mathscr{D}_f$.

EXERCICE TD21.25 (CHANGEMENT DE VARIABLE ET FONCTION RATIONNELLE)

Justifier que l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{1+\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

puis la calculer.

EXERCICE TD21.26 (CHANGEMENT DE VARIABLE ET FONCTION RATIONNELLE)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos(t)} + \frac{1}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$$

puis la calculer.

EXERCICE TD21.27 (FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE)

Soient f et g les fonctions définies par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } t=0 \\ \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{t} & \text{si } t \neq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que g est bien définie.
2. Étudier la parité de g.
3. Justifier que g est dérivable et calculer g'.
4. Dresser le tableau de variations de g.

EXERCICE TD21.28 (FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE)

Soient $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ et F l'application définie par

$$F \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2x} \cdot \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

1. Démontrer que F peut être prolongée par continuité en 0. Dans la suite, ce prolongement est encore (abusivement) noté F.
2. Démontrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ et, pour tout $x \in \mathbf{R}^*$, exprimer $F'(x)$ à l'aide d'une intégrale.
3. Démontrer que F est dérivable en 0 et que $F'(0) = 0$.

EXERCICE TD21.29 (DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DU TERME GÉNÉRAL D'UNE SUITE)

Démontrer

$$u_n := \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{=} 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left[\text{DA avec une précision de } \frac{1}{n}\right]$$

EXERCICE TD21.30 (FONCTION BÊTA D'EULER)

Pour $(p,q) \in \mathbf{N}^2$, on pose

$$\beta(p,q) := \int_0^1 t^p\,(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer $\beta(p,0)$ pour tout $p \in \mathbf{N}$.
2. Démontrer que $\beta(p,q) = \beta(q,p)$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$.
3. Démontrer :
$$\beta(p,q) = \frac{q}{p+1} \cdot \beta(p+1, q-1)$$
pour tout $p \in \mathbf{N}$ et tout $q \in \mathbf{N}^*$.
4. En déduire la valeur de $\beta(p,q)$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{N}^2$.

Exercice TD21.31 (suite d'intégrales)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$I_n := \int_1^e \ln^n(x)\, \mathrm{d}x$$

1. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est monotone. Qu'en déduire ?
2. Calculer I_0.
3. À l'aide d'une intégration par parties, trouver une relation entre I_n et I_{n+1}, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4. En déduire qu'il existe deux suites d'entiers $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$I_n = a_n e + b_n.$$

   Donner une relation de récurrence entre a_{n+1} et a_n, puis exprimer b_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
5. En déduire un encadrement de I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$, puis la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exercice TD21.32 (série harmonique alternée)

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, \mathrm{d}x.$$

1. Démontrer que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Calculer $I_n + I_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Démontrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un réel à préciser.

Exercice TD21.33 (suite d'intégrales)

En encadrant, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, \mathrm{d}x$, démontrer

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{n}$$

Exercice TD21.34 (sommes de Riemann)

En faisant apparaître une somme de Riemann, donnée un équivalent de

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice TD21.35 (sommes de Riemann et produits)

Étudier les limites éventuelles de

$$u_n := \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{1/n} \quad \text{et} \quad v_n := \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)^{1/n}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice TD21.36 (sommes de Riemann et restes de divisions euclidiennes)

Pour tout $(k,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$, on pose

$$r(n,k) := \text{reste de la division euclidienne de } n \text{ par } k$$

Étudier les limites éventuelles de

$$u_n := \frac{(n-r(n,1)) + (n-r(n,2) + \ldots + (n-r(n,n))}{n^2} \quad \text{et} \quad v_n := \frac{r(n,1)+r(n,2)+\ldots+r(n,n)}{n^2}$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD21.37 (SOMMES DE RIEMANN)
Étudier les limites éventuelles de

$$u_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad v_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k^3} \quad \text{et} \quad w_n := \sum_{k=n+1}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD21.38 (POINT FIXE)
Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue telle que

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$$

Démontrer que f admet un point fixe.

EXERCICE TD21.39 (MINORATION DE LA NORME INFINIE DE LA DÉRIVÉE SECONDE)
Soit $f : [0,1] \longrightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle

$$f(0) = f'(0) = f'(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad |f(1)| = 1$$

À l'aide de deux formules de Taylor, démontrer

$$\sup_{x\in[0,1]} |f''(x)| \geqslant 4$$

EXERCICE TD21.40 (INÉGALITÉ DE KOLMOGOROV)
Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow E$ une application de classe $\mathscr{C}^2$ telle que f et f'' soient bornées. On pose

$$M_0 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad M_2 := \sup_{x\in\mathbf{R}} |f''(x)|$$

1. Soit $x \in \mathbf{R}$. À l'aide d'une formule de Taylor, démontrer que pour tout $h > 0$:

$$|f'(x)| \leqslant \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}.$$

   Qu'en déduire pour f' ?
2. Démontrer :

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} |f'(x)| =: M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

EXERCICE TD21.41 (FONCTION CONTINUE D'INTÉGRALE NULLE PRENANT UNE VALEUR POSITIVE)
Soient a, b des réels tels que $a < b$, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue vérifiant $\displaystyle\int_a^b f = 0$. On suppose qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) > 0$. Démontrer qu'il existe $x_2 \in [a,b]$ tel que $f(x_2) < 0$.

EXERCICE TD21.42 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE D'INTÉGRALES)
Étudier le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\frac{1}{n!} \cdot \int_0^1 \mathrm{Arcsin}^n(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

EXERCICE TD21.43 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE D'INTÉGRALES)
Étudier le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

EXERCICE TD21.44 (COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE D'UNE SUITE D'INTÉGRALES)

Étudier le comportement asymptotique de la suite

$$\left(\int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

EXERCICE TD21.45 (FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE)

Étudier la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}\left(\sqrt{t}\right) + \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}\left(\sqrt{t}\right) \end{array} \right.$$

EXERCICE TD21.46 (LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE)

Étudier la limite éventuelle de

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$$

lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures.

EXERCICE TD21.47 (LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE)

Étudier la limite éventuelle de

$$\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$$

lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD21.48 (LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE)

Étudier la limite éventuelle de

$$\int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

lorsque x tens vers $+\infty$.