Feuille d'exercices n°20

Applications linéaires

Exercice TD20.1 (composition, linéarité et surjectivité)

Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ surjective et $g \in G^F$. On suppose que $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$. Démontrer que g est linéaire.

Exercice TD20.2 (image directe d'un sous-espace vectoriel engendré par une application linéaire)

Soient E, F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, A une partie de E et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Démontrer que $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}\big(f(A)\big)$.

Exercice TD20.3 (noyau et endomorphisme d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^3$)

Soit l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-2y-z, 3x-y, 2x+y+z) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $f \in \mathscr{L}\left(\mathbf{R}^3\right)$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}\left(f\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f\right)$.
3. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}\left(f\right)$ et $\mathrm{Im}\left(f\right)$ sont-il supplémentaires dans $\mathbf{R}^3$?

Exercice TD20.4 (polynôme annulateur d'un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$ et inversibilité)

Soit l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, 3x-2y) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbf{R}^2$.
2. Soit $u \in \mathbf{R}^2$. Donner une relation de dépendance linéaire liant les vecteurs $u, \varphi(u), \varphi\circ\varphi(u)$ dont les coefficients (non tous nuls donc) sont indépendants de u.
3. En déduire une relation de dépendance linéaire entre les endomorphismes $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}, \varphi, \varphi\circ\varphi$.
4. Démontrer alors que φ est bijective et exprimer φ^{-1} en fonction de φ et de $\mathrm{id}_{\mathbf{R}^2}$.

Exercice TD20.5 (noyau et image d'une composée)

Soient E, F, G des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$.

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}\left(g\circ f\right) = \mathrm{Ker}\left(f\right)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\left(g\right) \cap \mathrm{Im}\left(f\right) = \{0_F\}$.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}\left(g\circ f\right) = \mathrm{Im}\left(g\right)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\left(g\right) + \mathrm{Im}\left(f\right) = F$.

Exercice TD20.6 (forme linéaire surjective)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ et $f \in E^* := \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$.

1. Démontrer que f est soit l'application nulle, soit surjective.
2. Supposons f non nulle et considérons $x_0 \in E \setminus \mathrm{Ker}\left(f\right)$. Démontrer que $E = \mathrm{Ker}\left(f\right) \oplus \mathrm{Vect}(x_0)$.

Exercice TD20.7 (noyau et endomorphisme d'un endomorphisme de $\mathbf{R}_n[X]$)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et l'application

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(2X) - 2^n P(X) \end{array} \right.$$

1. Démontrer que $u \in \mathscr{L}(\mathbf{R}_n[X])$.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$.
3. Les sous-espaces $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont-il supplémentaires dans $\mathbf{R}_n[X]$?

Exercice TD20.8 (image et ensemble des points fixes d'un projecteur)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Démontrer $\mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right) = \mathrm{Im}\left(p\right)$.

EXERCICE TD20.9 (ENDOMORPHISMES ANNULÉS PAR $X^2 - 7 \cdot X + 12$)

Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et

$$\mathscr{A} := \left\{\varphi \in \mathscr{L}(E) \;:\; \varphi^2 - 7 \cdot \varphi + 12 \cdot \mathrm{id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}\right\}$$

1. Démontrer que $\mathscr{A} \neq \emptyset$.

Dans la suite, on fixe un élément φ de $\mathscr{A}$.

2. Démontrer que $p := \varphi - 3 \cdot \mathrm{id}_E$ est un projecteur de E.
3. Démontrer qu'il existe $a \in \mathbf{R}^*$ tel que $q = a \cdot (\varphi - 4 \cdot \mathrm{id}_E)$ soit un projecteur de E.
4. Que peut-on dire de $p \circ q$, $q \circ p$ et $p + q$?
5. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(\varphi - 3 \cdot \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi - 4 \cdot \mathrm{id}_E)$.
6. Exprimer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, φ^n en fonction de p et q.

EXERCICE TD20.10 (DES PROJECTEURS QUI COMMUTENT)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et p, q des projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Démontrer que $p \circ q$ est un projecteur de E.
2. Démontrer $\mathrm{Im}(p \circ q) = \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$ et $\mathrm{Ker}(p \circ q) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(q)$

EXERCICE TD20.11 (SUPPLÉMENTAIRES ET DUALITÉ)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, E_1, E_2 deux espaces supplémentaires de E. On note $E^* := \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ et

$$E_1^\perp := \left\{f \in E^* \;:\; \forall x \in E_1 \quad f(x) = 0_E\right\} \quad \text{et} \quad E_2^\perp := \left\{f \in E^* \;:\; \forall x \in E_2 \quad f(x) = 0_E\right\}$$

Démontrer que $E^* = E_1^\perp \oplus E_2^\perp$.

EXERCICE TD20.12 (ENDOMORPHISME INVERSIBLE À DROITE)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe $g \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_E$.

1. Démontrer que $g \circ f$ est un projecteur de E.
2. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont supplémentaires de deux manières.

EXERCICE TD20.13 (CARACTÉRISATION DES HOMOTHÉTIES ET ÉCHANGE DE LA PLACE DE QUANTIFICATEURS)

Soient E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Démontrer qu'il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$.
2. Démontrer que tous les scalaires λ_x $(x \in E \setminus \{0_E\})$ sont égaux.
3. Qu'en déduire pour l'endomorphisme f ?

EXERCICE TD20.14 (SOUS-ESPACES DE $\mathbf{K}[X]$ STABLE PAR DÉRIVATION)

On considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbf{K}[X]$ stable par dérivation, i.e. tel que, pour tout $P \in F$, $P' \in F$.

1. Supposons que F contient un polynôme non nul P, dont le degré est noté d. Démontrer $\mathbf{K}_d[X] \subset F$.
2. Supposons que F est de dimension finie $n \geqslant 1$. Démontrer $F = \mathbf{K}_{n-1}[X]$.
3. Supposons que F n'est pas de dimension finie. Démontrer $F = \mathbf{K}[X]$.

EXERCICE TD20.15 (LEMME DES CINQ)

On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "h_1"] & E_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "h_2"] & E_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "h_3"] & E_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "h_4"] & E_5 \arrow[d, "h_5"] \\
F_1 \arrow[r, "g_1"] & F_2 \arrow[r, "g_2"] & F_3 \arrow[r, "g_3"] & F_4 \arrow[r, "g_4"] & F_5
\end{tikzcd}$$

formé de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et d'applications linéaires. On suppose que le diagramme est commutatif, i.e. $h_2 \circ f_1 = g_1 \circ h_1$, $h_3 \circ f_2 = g_2 \circ h_2$, $h_4 \circ f_3 = g_3 \circ h_3$, $h_5 \circ f_4 = g_4 \circ h_4$ et que les deux lignes sont exactes, i.e. $\mathrm{Ker}(f_2) = \mathrm{Im}(f_1)$ $\mathrm{Ker}(f_3) = \mathrm{Im}(f_2)$ $\mathrm{Ker}(f_4) = \mathrm{Im}(f_3)$ et $\mathrm{Ker}(g_2) = \mathrm{Im}(g_1)$ $\mathrm{Ker}(g_3) = \mathrm{Im}(g_2)$, $\mathrm{Ker}(g_4) = \mathrm{Im}(g_3)$. On suppose que les applications linéaires h_1, h_2, h_4, h_5 sont des isomorphismes. Démontrer que h_3 est un isomorphisme.

EXERCICE TD20.16 (REPRÉSENTATION D'UNE FORME LINÉAIRE SUR UN ESPACE DE POLYNÔMES)
Soient $n \in \mathbf{N}$ et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels deux-à-deux distincts. Démontrer

$$\exists (a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \quad \forall P \in \mathbf{R}_n[X] \quad \int_0^1 \widetilde{P}(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot \widetilde{P}(x_i)$$