FEUILLE D'EXERCICES N°19

ESPACES DE DIMENSION FINIE

EXERCICE TD19.1 (BASE DE $\mathbf{R}^4$)

Soient

$$v_1 := (2,2,0,3) \quad , \quad v_2 := (0,3,6,2) \quad , \quad v_3 := (7,0,-12,5) \quad , \quad v_4 := (0,1,-6,4)$$

1. Déterminer une base $\mathscr{B}$ du sous-espace $\operatorname{Vect}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ de $\mathbf{R}^4$.
2. Compléter $\mathscr{B}$ en une base de $\mathbf{R}^4$.

EXERCICE TD19.2 (CNS POUR QU'UNE FAMILLE DE VECTEURS SOIT UNE BASE DE $\mathbf{R}^3$)

Dans $E = \mathbf{R}^3$, on pose

$$e = (1,1,1) \quad , \quad f = (1,2,3) \quad , \quad g_a = \left(a, a^3, a^5\right)$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour que $\left(e, f, g_a\right)$ soit une base de E.

EXERCICE TD19.3 (DIMENSIONS DE SOUS-ESPACES DE $\mathbf{R}^4$)

Dans R^4, soient

$$a = (1,2,3,4) \quad , \quad b = (1,1,1,3) \quad , \quad c = (2,1,1,3) \quad , \quad d = (-1,0,-1,2) \quad , \quad e = (2,3,0,1)$$

Quelles sont les dimensions de $U := \operatorname{Vect}(a, b, c)$, $V := \operatorname{Vect}(d, e)$, $U \cap V$ et $U + V$?

EXERCICE TD19.4 (INTERSECTION ET SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES DE $\mathbf{R}^3$)

Dans $\mathbf{R}^3$, soient

$$E_1 := \operatorname{Vect}((1,2,0),(0,1,1)) \quad , \quad E_2 := \operatorname{Vect}((1,1,1))$$

Déterminer $E_1 \cap E_2$ et $E_1 + E_2$.

EXERCICE TD19.5 (INTERSECTION, SOMME DE DEUX SOUS-ESPACES DE $\mathbf{R}^4$ ET RECHERCHE DE SUPPLÉMENTAIRES)

Soient

$$v1 = (1,-1,0,1) \quad , \quad v_2 = (0,2,1,0) \quad , \quad w1 = (0,6,-1,4) \quad , \quad w_2 = (3,3,1,5)$$

et les deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ définis par $E_1 = \operatorname{Vect}(v_1, v_2)$ et $E_2 = \operatorname{Vect}(w_1, w_2)$

1. Caractériser $E_1 \cap E_2$.
2. Donner une base de $E_1 + E_2$.
3. Définir un supplémentaire de $E_1 + E_2$ dans R^4.

EXERCICE TD19.6 (ÉQUATIONS CARTÉSIENNES ET SUPPLÉMENTAIRES D'UN SOUS-ESPACE DE DIMENSION 3 DE $\mathbf{R}^4$)

Dans $\mathbf{R}^4$, soient

$$u = (2,1,1,1) \quad , \quad v = (1,-1,2,1) \quad , \quad w = (1,3,-1,2)$$

1. Démontrer que les vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants. Qu'en déduire pour $F := \operatorname{Vect}(u, v, w)$?
2. Donner une équation cartésienne de F.
3. Soit $e_4 := (0,0,0,1)$. Démontrer que, pour tous réels r, s, t

   $$\operatorname{Vect}(e_4 + r \cdot u + s \cdot v + t \cdot w)$$

   est un supplémentaire de F.
4. Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4$. Décomposer x sur F et $\operatorname{Vect}(e_4)$.

EXERCICE TD19.7 (INTERSECTION DE DEUX SOUS-ESPACES DE DIMENSION 3 DE $\mathbf{R}^5$)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Démontrer que $F \cap G \neq \{0\}$.

Exercice TD19.8 (Équations cartésiennes de sous-espaces de $\mathbf{R}^4$)

Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^4$ suivants à l'aide d'équations cartésiennes.

$$F_1 := \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1)) \quad , \quad F_2 := \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1),(1,1,1,-1)) \quad , \quad F_3 := \mathrm{Vect}\,((1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,0,0,1))$$

Exercice TD19.9 (Égalité de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$)

Soient

$$u = (1,-1,1) \quad , \quad v = (0,-1,2) \quad , \quad w = (1,-2,3)$$

1. Démontrer que (u,v,w) sont liés et donner une base de $F := \mathrm{Vect}\,(u,v,w)$.
2. Soient
$$G := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \ : \ x + 2y + z = 0\right\}$$
Justifier que G est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$ puis que $F = G$.

Exercice TD19.10 (Supplémentaires d'un plan dans $\mathbf{R}^4$)

Soient le système

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4$.

1. Donner une base $\mathscr{B}$ de l'ensemble solution de (S), noté F.
2. Compléter $\mathscr{B}$ en une base de $\mathbf{R}^4$.
3. Justifier que $\mathrm{Vect}\,(e_3,e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbf{R}^4$.
4. Soit $x = (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbf{R}^4$. Décomposer x sur F et $\mathrm{Vect}\,(e_3,e_4)$.

Exercice TD19.11 (Étude de trois sous-espaces de $\mathbf{R}^4$)

Soient

$$P := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x - y + z - t = 0\right\} \quad , \quad Q := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ x = y\right\} \quad , \quad R := \left\{(x,y,z,t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ z = t\right\}$$

1. Déterminer les dimensions de P, Q, R, $P \cap Q$, $Q \cap R$ et $R + P$.
2. Déterminer un supplémentaire S dans $\mathbf{R}^4$ de $P \cap Q$, inclus dans R.
3. Démontrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, il existe $(x,y,z,t) \in R$ tel que
$$x - y + z - t = a \quad , \quad x = y + b$$
4. Démontrer que, pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$, il existe un unique $(x,y,z,t) \in S$ tel que
$$x - y + z - t = a \quad , \quad x = y + b$$

Exercice TD19.12 (L'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas de dimension finie)

Pour tout $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & e^{kx} \end{array} \right.$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la famille $\left(f_0, f_1, \ldots, f_n\right)$ est libre.
2. En déduire que l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice TD19.13 (Dimension d'un espace de polynômes)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $\alpha \in \mathbf{K}$ et

$$F := \left\{P \in \mathbf{R}_n[X] \ : \ \widetilde{P}(\alpha) = 0\right\}$$

1. Démontrer que $\mathscr{B} := \left((X-\alpha)\,X^k\right)_{k \in [\![0,n-1]\!]}$ est une base de F.
2. Quelle est la dimension de F ?
3. Déterminer les coordonnées de $(X-\alpha)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

EXERCICE TD19.14 (POLYNÔMES DE $\mathbf{R}_4[X]$ ANNULÉS PAR DEUX RÉELS DISTINCTS)

Soient $E = \mathbf{R}_4[X]$ et a, b deux réels distincts. On désigne par F l'ensemble des polynômes de E dont a et b sont racines. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.

EXERCICE TD19.15 (IMAGE ET NOYAU D'UNE MATRICE)

Soient $(n,p) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. On pose

$$\mathrm{Ker}\,(A) := \left\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K}) \ :\ AX = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})}\right\} \quad , \quad \mathrm{Im}\,(A) := \left\{AX \ :\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})\right\}$$

1. Démontrer que $\mathrm{Ker}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.
2. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$.
3. Notons $C_1, \ldots, C_p$ les vecteurs colonnes de la matrice A. Démontrer

$$\mathrm{Im}\,(A) = \mathrm{Vect}\left(C_1, C_2, \ldots, C_p\right)$$

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(A)$ et $\mathrm{Im}\,(A)$ lorsque

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

EXERCICE TD19.16 (SUPPLÉMENTAIRE COMMUN À DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension finie n i.e. F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que F et G ont un supplémentaire commun dans E, i.e. qu'il existe un sous-espace H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$, si et seulement si $\dim\,(F) = \dim\,(G)$.

EXERCICE TD19.17 (SUPPLÉMENTAIRE COMMUN À UN NOMBRE FINI DE SOUS-ESPACES VECTORIELS - X)

Soient E un sous-espace de dimension finie et un entier $p \geqslant 2$.

1. Soient p sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ tous distincts de E. Démontrer que $E \neq F_1 \cup \ldots \cup F_p$.
2. Supposons les sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_p$ de même dimension. Démontrer qu'ils possèdent un supplémentaire commun.

EXERCICE TD19.18 (DIMENSION D'UN $\mathbf{C}$-VECTORIEL VS. DIMENSION DU $\mathbf{R}$-ESPACE VECTORIEL ASSOCIÉ)

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie n. Démontrer que E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $2n$.

EXERCICE TD19.19 ($\mathbf{K}[X]$ N'EST PAS DE DIMENSION FINIE)

Démontrer que $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie.