FEUILLE D'EXERCICES N°18

ESPACES VECTORIELS

§ 1. ESPACES VECTORIELS D'UPLETS DE NOMBRES

EXERCICE TD18.1 (CNS POUR QU'UNE PARTIE DE $\mathbf{R}^3$ SOIT UN SOUS-ESPACE VECTORIEL)

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbf{R}$ pour que

$$F_a := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, 2x+y-z=a\right\}$$

soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.

EXERCICE TD18.2 (INTERSECTION DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbf{R}^3$)

Soient

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, 2x+y+z=0\right\} \quad \text{et} \quad F := \{(x,x,-x) \,:\, x \in \mathbf{R}\}$$

1. Démontrer que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$.
2. Déterminer $E \cap F$.

EXERCICE TD18.3 (COMPARAISON DE DEUX SOUS-ESPACES VECTORIELS DE $\mathbf{R}^3$)

Soient

$$E := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x-2y+z=0\right\} \quad , \quad u=(1,1,1) \quad \text{et} \quad v=(3,1,-1)$$

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
2. Soit $F := \mathrm{Vect}(u,v)$. Démontrer que $F \subset E$.
3. A-t-on $E=F$?

EXERCICE TD18.4 (FAMILLES GÉNÉRATRICES D'UN HYPERPLAN DE $\mathbf{R}^3$)

Soient

$$u=(1,-1,1) \quad , \quad v=(0,-1,2) \quad , \quad w=(1,-2,3)$$

1. Démontrer $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(u,v,w)$.
2. Justifier que
$$F := \left\{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \,:\, x+2y+z=0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^3$.
3. Démontrer que $F = \mathrm{Vect}(u,v)$.

EXERCICE TD18.5 (SUPPLÉMENTAIRES D'UN HYPERPLAN DE $\mathbf{R}^n$)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$ et

$$H := \left\{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^n \,:\, \sum_{k=1}^{n} a_k x_k = 0\right\}$$

1. Justifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^n$.
2. Démontrer que pour tout $u=(u_1,\dots,u_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0_{\mathbf{R}^n}\}$

$$\mathbf{R}^n = H \oplus \mathrm{Vect}(u) \quad \Longleftrightarrow \quad u \notin H$$

Exercice TD18.6 (de la liberté d'une famille de vecteurs de $\mathbf{C}^3$ dépendant d'un paramètre)

Soient $m \in \mathbf{C}$ et

$$u = (1, m, m) \quad , \quad v = \left(m, 1+m^2, 2m^2\right) \quad \text{et} \quad w = \left(m, 2m^2, 1+m^2\right)$$

1. Soit $A \in \mathscr{M}_3(\mathbf{C})$ la matrice dont les vecteurs colonnes sont $u^\top$, $v^\top$ et $w^\top$. Quel lien existe-t-il entre la liberté de la famille (u, v, w) et l'inversibilité de la matrice A ?
2. Pour quelles valeurs de m la famille (u, v, w) est-elle libre ?
3. Pour chacune des valeurs de m telle que la famille (u, v, w) est liée, exprimer un des vecteurs u, v, w comme combinaison linéaire des deux autres.

Exercice TD18.7 (équation cartésienne et supplémentaires d'un hyperplan de $\mathbf{R}^4$)

Soient

$$u := (2, 1, 1, 1) \quad , \quad v := (1, -1, 2, 1) \quad , \quad w := (1, 3, -1, 2)$$

et $H := \text{Vect}(u, v, w)$.

1. Démontrer que la famille (u, v, w) est libre.
2. Soit $b = (b_1, b_2, b_3, b_4) \in \mathbf{R}^4$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur b pour que le système
$$x \cdot u + y \cdot v + z \cdot w = b$$
d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ possède une solution.
3. Déduire de Q2 un triplet $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}$ tel que
$$H = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \ : \ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0\right\} \qquad \left[\ \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t = 0 \text{ est une équation cartésienne de } H\right]$$
4. Posons $e_4 := (0, 0, 0, 1)$. Démontrer que, pour tout $(r, s, t) \in \mathbf{R}^3$, $\text{Vect}(e_4 + r \cdot u + s \cdot v + t \cdot w)$ est un supplémentaire de H dans $\mathbf{R}^4$.
5. Décomposer tout vecteur $(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4$ dans la somme directe $\mathbf{R}^4 = H \oplus \text{Vect}(e_4)$.

§ 2. Espaces vectoriels de matrices

Exercice TD18.8 (commutant d'une matrice)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et

$$\mathrm{C}(A) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \ : \ AM = MA\}$$

1. Démontrer que $\mathrm{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Soient $d_1, \ldots, d_n$ des scalaires deux-à-deux distincts et
$$A := \sum_{i=1}^{n} d_i \cdot E_{i,i}$$
Démontrer $\mathrm{C}(A) = \mathscr{D}_n(\mathbf{R})$ et en donner une base.

Exercice TD18.9 (matrices circulantes)

Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$ et $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice définie par

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 \quad [J]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in [\![1, n-1]\!] \text{ et } j = i+1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Représenter la matrice J.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Comment s'obtiennent simplement les matrices AJ et JA ?
3. Calculer, pour tout $k \in \mathbf{N}$, J^k.
4. Démontrer que la famille $\left(J^k\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$ est une famille libre.
5. On appelle matrice circulante toute combinaison linéaire de la famille $\left(J^k\right)_{k \in [\![0, n-1]\!]}$. Démontrer que le produit de deux matrices circulantes est circulante.

§ 3. Espaces vectoriels de suites

Exercice TD18.10 (suite récurrente linéaire d'ordre 2)

Démontrer que

$$F := \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \,:\, \forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et en donner une base.

Exercice TD18.11 (suite récurrente linéaire d'ordre 3)

Soit

$$F := \left\{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}} \,:\, \forall\, n \in \mathbf{N} \quad u_{n+3} = u_n\right\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.
2. Déterminer trois nombres complexes non nuls r_0, r_1, r_2 tels que les suites géométriques $\left(r_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, $\left(r_1^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(r_2^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ appartiennent à F.
3. Démontrer que la famille
$$\mathscr{F} := \left(\left(r_0^n\right)_{n\in\mathbf{N}}, \left(r_1^n\right)_{n\in\mathbf{N}}, \left(r_2^n\right)_{n\in\mathbf{N}}\right)$$
est libre.
4. Démontrer que l'application
$$f \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathbf{C}^3 \\ (u_n)_{n\in\mathbf{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array} \right.$$
est bijective.
5. À l'aide de Q4 et d'un raisonnement par analyse-synthèse, démontrer que la famille $\mathscr{F}$ est génératrice de F.

§ 4. Espaces vectoriels de polynômes

Exercice TD18.12 (famille formée par un polynôme et ses polynômes dérivés itérés non nuls)

Soient $P \in \mathbf{K}[X] \setminus \left\{0_{\mathbf{K}[X]}\right\}$ et $n := \deg(P) \in \mathbf{N}$. Démontrer que la famille

$$\left(P, P', P'', \ldots, P^{(n)}\right)$$

est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exercice TD18.13 (de la liberté d'une famille de polynôme)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et a, b des éléments distincts de $\mathbf{K}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, posons

$$P_k := (X-a)^{n-k} \cdot (X-b)^k$$

Démontrer que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre.

Exercice TD18.14 (de la liberté d'une famille de polynôme)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$P_k := -(n+1) \cdot X^k + \sum_{\ell=0}^{n} X^\ell$$

La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est-elle libre ?

Exercice TD18.15 (recherche d'un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel dans $\mathbf{K}[X]$)

Soit $A \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme non constant.

1. Démontrer que
$$A\mathbf{K}[X] := \{PA \,:\, P \in \mathbf{K}[X]\} \qquad \left[\text{ensemble des multiples du polynôme } A\right]$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbf{K}[X]$.

§ 5. Espaces vectoriels de fonctions

Exercice TD18.16 (sous-espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré au plus 2)

Notons

$$F := \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array} \right. : (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$.
2. Soient les quatre fonctions

$$f_0 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array} \right. \qquad f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x(x+1) \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x(x-1) \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{array} \right.$$

   La fonction f_3 est-elle combinaison linéaire de la famille (f_0, f_1, f_2) ?
3. La famille (f_0, f_1, f_2) est-elle une famille génératrice de l'espace vectoriel F ?

Exercice TD18.17 (de la liberté de familles de fonctions)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$

$$\chi_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = k \\ 0 & \text{si } x \neq k \end{cases} \end{array} \right. \qquad f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array} \right. \qquad g_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(kx) \end{array} \right. \qquad h_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos^k(x) \end{array} \right.$$

La famille $(\chi_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ est-elle libre ? Même question pour les familles $(f_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$, $(g_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ et $(h_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.

Exercice TD18.18 (amplitude et phase)

Démontrer que

$$F := \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & A\cdot\sin(t+\varphi) \end{array} \right. : (A,\varphi) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ et en donner une base.

Exercice TD18.19 (sous-espace vectoriel des fonctions « affine × exponentielle »)

Notons

$$F := \left\{ \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (at+b)\cdot e^t \end{array} \right. : (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ et en donner une base.

Exercice TD18.20 (un sous-espace vectoriel des fonctions homographiques)

Notons

$$F := \left\{ f_{a,b} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & a + \dfrac{b}{x-2} \end{array} \right. : (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbf{R}\setminus\{2\}, \mathbf{R})$.
2. Donner une base $\mathscr{B}$ de E.
3. Soient $(c,d) \in \mathbf{R}^2$ et

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{cx+d}{x-2} \end{array} \right.$$

   Démontrer que $f \in F$ et donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de F déterminée en Q2.
4. Soient $(a,b,n) \in \mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{N}^*$ et

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & (x-2)^n \cdot f_{a,b}^{(n)}(x) \end{array} \right.$$

   Démontrer que $g \in F$ et donner ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de F déterminée en Q2.

EXERCICE TD18.21 (APPLICATIONS BORNÉES)
Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$. Démontrer que

$$\mathrm{B}(I,\mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^I \ : \ f \text{ est bornée sur } I \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^I$.

EXERCICE TD18.22 (APPLICATIONS LIPSCHITZIENNES)
Soit I un intervalle non vide de $\mathbf{R}$. Une application $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ est dite lipschitzienne sur I si

$$\exists\, k \in \mathbf{R}_+ \quad \underbrace{\forall\, (x,y) \in I^2 \quad \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant k \cdot |x-y|}_{f \text{ est } k\text{-lipschitzienne sur } I}$$

Démontrer que

$$\mathrm{Lip}(I,\mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^I \ : \ f \text{ est lipschitzienne sur } I \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^I$.

EXERCICE TD18.23 (FONCTIONS CROISSANTES ET FONCTIONS À VARIATIONS BORNÉES)
Soient des réels a, b tels que $a < b$. On pose

$$\mathrm{Cr}([a,b],\mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ f \text{ est croissante sur } [a,b] \right\} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{VB}([a,b],\mathbf{R}) := \left\{ f \in \mathbf{R}^{[a,b]} \ : \ \exists\, (f_1,f_2) \in \mathrm{Cr}([a,b],\mathbf{R})^2 \ f = f_1 - f_2 \right\}$$

1. L'ensemble $\mathrm{Cr}([a,b],\mathbf{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{[a,b]}$?
2. Démontrer que l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{[a,b]}$.

EXERCICE TD18.24 (ENSEMBLE SOLUTION D'UNE EDLCCH2)
Démontrer que

$$F := \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \ : \ f'' + \sqrt{3} \cdot f' + f = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et en déterminer une base.

EXERCICE TD18.25 (ENSEMBLES SOLUTION DE DEUX EDLCCH2)
Soient

$$F_1 := \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \ : \ f'' = f \right\} \quad \text{et} \quad F_2 := \left\{ f \in \mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \ : \ f'' - 2 \cdot f' + f = 0 \right\}$$

1. Démontrer que F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$.
2. Déterminer une base de $F_1 \cap F_2$, F_1, F_2 et $F_1 + F_2$.

§ 6. ESPACES VECTORIELS ABSTRAITS

EXERCICE TD18.26 (SOUS-ESPACE VECTORIEL ENGENDRÉ PAR LE COMPLÉMENTAIRE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E et $A := E \setminus F$.

1. Justifier que A n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
2. Quel est le sous-espace vectoriel engendré par A ?

EXERCICE TD18.27 (COMPLÉMENTAIRE D'UN SOUS-ESPACE VECTORIEL UNION SINGLETON FORMÉ DU VECTEUR NUL)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ et de E. Démontrer que $G := (E \setminus F) \cup \{0_E\}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

EXERCICE TD18.28 (RÉDUCTION DU NOMBRE DE VECTEURS D'UNE FAMILLE GÉNÉRATRICE D'UN ESPACE VECTORIEL)
Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbf{N}^*$, $(x_1,\ldots,x_n) \in E^n$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbf{K}^n$ tel que $\lambda_1 \neq 0$ et $y_1 := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot x_k$. Démontrer

$$\mathrm{Vect}\left((x_1,\ldots,x_n)\right) = \mathrm{Vect}\left((y_1,x_1,\ldots,x_n)\right)$$

Exercice TD18.29 (transformation d'une famille libre en une famille libre)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1. Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille libre et $A = \left(a_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer que la famille
$$\mathscr{F} := \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot u_j \,,\, \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \cdot u_j \,,\, \ldots \,,\, \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot u_j \right) \in E^n$$
est libre si et seulement si la matrice A est inversible.
2. Soit $(u_1, u_2, u_3) \in E^3$ une famille libre. La famille
$$(u_1 + u_2 \,,\, u_2 + u_3 \,,\, 2 \cdot u_1 + u_2 + u_3)$$
est-elle libre ?

Exercice TD18.30 (réunion de deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Démontrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.

Exercice TD18.31 (réunion filtrante de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non vide et $(F_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que
$$\forall\, (i,j) \in I^2 \quad \exists\, k \in I \quad F_i \subset F_k \text{ et } F_j \subset F_k$$
Démontrer que la réunion $\bigcup_{i \in I} F_i$ est une sous-espace vectoriel de E.

Exercice TD18.32 (d'une base sur C à une base sur R)

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{C}$-espace vectoriel. En restreignant la multiplication par un scalaire sur E de $\mathbf{C}$ à $\mathbf{R}$, on définit l'application
$$\cdot_{\mathbf{R}} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, u) & \longmapsto & \lambda \cdot u \end{array} \right.$$
Le triplet $(E,+,\cdot_{\mathbf{R}})$ est alors un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Démontrer que si le $\mathbf{C}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot)$ possède une base finie $\mathscr{B}_{\mathbf{C}} := (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ alors
$$\mathscr{B}_{\mathbf{R}} := (u_1, u_2, \ldots, u_n) \# (i \cdot u_1, i \cdot u_2, \ldots, i \cdot u_n)$$
est une base du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $(E,+,\cdot_{\mathbf{R}})$.

Exercice TD18.33 (somme directe induite)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels de E tels que $F \subset H$ et $E = F \oplus G$. Démontrer que $H = F \oplus (G \cap H)$.

Exercice TD18.34 (d'une somme à une somme directe)

Soient $(E,+,\cdot)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soient F, G des sous-espaces vectoriels de E et H un supplémentaire de $F \cap G$ dans G. Démontrer que $F + G = F \oplus H$.