Feuille d'exercices n°17

Analyse asymptotique

Exercice TD17.1 (DL d'un polynôme à tout ordre en un point réel)

Soient $P \in \mathbf{R}[X]$ un polynôme de degré $d \geqslant 1$, $a \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}$. Justifier que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{d} [P]_k \cdot x^k \end{array} \right.$$

possède un $\mathrm{DL}_n(a)$ et expliciter ce dernier.

Exercice TD17.2 (composition d'un DL par la droite : fondement)

Soient I, J des intervalles ouverts de $\mathbf{R}$ contenant 0, $n \in \mathbf{N}$ et deux fonctions $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$, $g\colon J \longrightarrow \mathbf{R}$. On suppose que f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, i.e. il existe $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

et que $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Démontrer que la fonction $f \circ g$ est définie sur un voisinage de 0, puis que

$$f(g(x)) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \cdot (g(x))^k + \mathrm{o}\left(g(x)^n\right)$$

Exercice TD17.3 (composition d'un DL par la droite : exemple)

À l'aide d'une composition d'un DL par la droite (cf. exercice TD17.2), démontrer

$$e^{\sin(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

Exercice TD17.4 (DL de la fonction Arcsin à tout ordre)

1) Soit $n \in \mathbf{N}$. À l'aide d'une composition d'un DL par la droite (cf. exercice TD17.2), démontrer

$$\sqrt{\frac{1}{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}\cdot (k!)^2} \cdot x^{2k} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

1) Soit $n \in \mathbf{N}$. En déduire que la fonction Arcsin possède un $\mathrm{DL}_{2n+2}(0)$ et expliciter ce dernier.

Exercice TD17.5 (Produit de deux DL)

1) Démontrer

$$e^x \cdot \cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x - \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$$

2) Donner un équivalent de $e^x \cdot \cos(x) - 1 - x$ lorsque x tend vers 0.

Exercice TD17.6 (produit de deux DL)

1) Démontrer

$$\sin(x) \cdot \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

2) Donner un équivalent de $\sin(x) \cdot \ln(1+x)$ lorsque x tend vers 0.
3) Démontrer

$$\sin(x) \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{=} 2 \cdot x^2 + \frac{x^4}{3} + \mathrm{o}\left(x^5\right)$$

Exercice TD17.7 (produit de deux DL)
Démontrer
$$(x-\sin(x))\cdot(e^x-1) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^4}{6}+\frac{x^5}{12}+\frac{7}{360}\cdot x^6+\mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Exercice TD17.8 (puissance d'un DL)
Donner le $\mathrm{DL}_9(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \sin^6(x)$$

Exercice TD17.9 (composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \sin(\tan(x))$$

Exercice TD17.10 (composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \exp(\mathrm{Arcsin}(x))$$

Exercice TD17.11 (composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \sqrt{1+\sin(x)}$$

Exercice TD17.12 (composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_2(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$$

Exercice TD17.13 (composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \exp(\cos(\ln(\cos(x))))$$

Exercice TD17.14 (composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \mathrm{Arctan}(2\cdot\sin(x))$$

Exercice TD17.15 (composition d'un nombre fini de DL)
Soit $n\in\mathbf{N}^*$. Donner le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction
$$f_n := \underbrace{\tan\circ\tan\circ\ldots\circ\tan}_{n\text{ fois}}$$

Exercice TD17.16 (composition et produit de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_6(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \ln\left(1+x^2\right)\cdot\exp\left(x^2\right)$$

Exercice TD17.17 (composition et produit de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$$

Exercice TD17.18 (inverse d'un DL et composition de deux DL)
Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$f:\ x\longmapsto \frac{x}{\tan(x)}$$

Exercice TD17.19 (inverse et quotient de DL)

1) À l'aide d'une composition d'un DL par la droite (cf. exercice TD17.2), démontrer que la fonction

$$g : x \longmapsto \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-(1-\cos(x))}$$

possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ et expliciter ce dernier.

2) Démontrer

$$\frac{e^x}{\cos(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{x^4}{2} + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Exercice TD17.20 (quotient de DL)

Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x}$$

Exercice TD17.21 (quotient de DL)

Démontrer

$$\frac{\sqrt{3+x}}{\sqrt[3]{7+x}} \underset{x\to 1}{=} 1 + \frac{1}{12}\cdot(x-1) - \frac{11}{576}\cdot(x-1)^2 + \mathrm{o}\left((x-1)^2\right)$$

Exercice TD17.22 (quotient de DL)

Démontrer

$$\frac{(e^x-1)\cdot\sin(x)}{\cos(2x)} \underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^3}{2} + 2\cdot x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Exercice TD17.23 (quotient de DL)

Démontrer

$$\frac{(e^x-1)\cdot\sin(x)}{\cos(2x)} \underset{x\to 0}{=} x^2 + \frac{x^3}{2} + 2\cdot x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Exercice TD17.24 (quotient et composition de deux DL)

Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sqrt{3}+x}{1+x\cdot\sqrt{3}}\right)$$

Exercice TD17.25 (DA)

Donner un développement asymptotique à 4 termes en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt{x^4+x+1}$$

Exercice TD17.26 (DA)

Donner un développement asymptotique à 2 termes en $+\infty$ de la fonction

$$f : x \longmapsto \sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}$$

Exercice TD17.27 (primitivation, DL et DA)

Soit f la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$$

1) Donner le $\mathrm{DL}_{10}(0)$ de f.
2) Donner un développement asymptotique à 10 termes en $+\infty$ de la fonction f.

EXERCICE TD17.28 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{\sin(x)-x}{x\cdot\ln\left(1-x^2\right)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.29 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.30 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{1}{x^2}\cdot\ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.31 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{\sqrt{\sin(x)}-\sqrt{x}}{\sin\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.32 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{e^x-(\cos(x)+x)}{x^2}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.33 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{x^3\cdot\mathrm{Arctan}(x)-x^4}{\cos\left(x^2\right)-1}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.34 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{\mathrm{Arctan}(x)-\sin(x)}{\mathrm{Arcsin}(x)-\tan(x)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.35 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{\cos(x)-\exp\left(\frac{-x^2}{2}\right)}{\mathrm{Arcsin}\left(x^3\right)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.36 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{4\cdot\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.37 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{\sin^2(x)+2\cdot\ln(\cos(x))}{x^2\cdot(1-\cos(2x))}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.38 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{2}{\sin^2(x)}-\frac{1}{1-\cos(x)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.39 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{x\cdot(1+\cos(x))-2\cdot\tan(x)}{2\cdot x-\sin(x)-\tan(x)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.40 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\mathrm{Arcsin}^2(x)}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.41 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 0)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{2\cdot(1-\cos(x))\cdot\sin(x)-x^3\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}{\sin^5(x)-x^5}$$
lorsque x tend vers 0.

EXERCICE TD17.42 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN 1^+)
Étudier la limite éventuelle de
$$\frac{x^x-1}{\ln\left(1-\sqrt{x^2-1}\right)}$$
lorsque x tend vers 1^+.

EXERCICE TD17.43 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN $+\infty$)
Soit $a>0$. Étudier la limite éventuelle de
$$\left(\sqrt[3]{x^3+a\cdot x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x$$
lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE TD17.44 (ÉTUDE DE LA LIMITE ÉVENTUELLE D'UNE FONCTION EN $+\infty$)
Étudier la limite éventuelle de
$$x\cdot\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^x-\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right)$$
lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice TD17.45 (Règle de L'Hôpital)

1) Soient $a \in \mathbf{R}$ et f, g deux fonctions définies et dérivables en a. On suppose que $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$. Démontrer

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

2) En déduire la limite éventuelle de

$$\frac{\sin(x)}{\ln(1+2x)}$$

lorsque x tend vers 0.

3) Comment peut-on généraliser le résultat de Q1 ?

Exercice TD17.46 (Étude d'une fonction au voisinage de 0)

Soit f la fonction définie par

$$f : t \longmapsto \frac{1}{e^t - 1} - \frac{1}{t}$$

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Démontrer que cette fonction se prolonge par continuité en 0.
3) Le prolongement par continuité de f en 0 est-il dérivable en 0 ?

Exercice TD17.47 (Étude d'une fonction au voisinage de 0)

Soit f la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \frac{\cos(x)}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x}$$

On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Démontrer que cette fonction se prolonge par continuité en 0.

Dans la suite, On note (abusivement) f le polongement de f par continuité en 0.

3) Démontrer que la fonction f est dérivable en 0.
4) Déterminer la tangente $\mathscr{T}_0$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{T}_0$ au voisinage du point $(0, f(0))$.

Exercice TD17.48 (Étude d'une fonction au voisinage de 0)

Soit f la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \frac{\operatorname{Arctan}(x)}{\sin^3(x)} - \frac{1}{x^2}$$

On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Donner le domaine de définition de f.
2) Démontrer que cette fonction se prolonge par continuité en 0.

Dans la suite, On note (abusivement) f le polongement de f par continuité en 0.

3) Démontrer que la fonction f est dérivable en 0.
4) Déterminer la tangente $\mathscr{T}_0$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{T}_0$ au voisinage du point $(0, f(0))$.

Exercice TD17.49 (Étude d'une fonction au voisinage de 0)

Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right) \end{array} \right.$$

On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction f.
2) Déterminer la tangente $\mathscr{T}_0$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 et préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et de $\mathscr{T}_0$ au voisinage du point $(0, f(0))$.
3) Donner la valeur de $f^{(n)}(0)$ pour $n \in [\![0, 3]\!]$.

Exercice TD17.50 (extremum local)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, I un intervalle non vide, a un point de I qui n'est pas une extrémité (point intérieur à I), $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ sur I telle que, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $f^{(k)}(a) = 0$ et $f^{(n)}(a) \neq 0$.

1) Déterminer un équivalent de $f(x) - f(a)$ lorsque x tend vers a.
2) Déterminer une CNS sur n pour que la fonction f atteigne en a un extremum local.

Exercice TD17.51 (étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$)

Soit la fonction

$$f : x \longmapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$$

On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Donner le domaine de définition de la fonction f.
2) Déterminer une droite Δ asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$, puis préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ au voisinage de $+\infty$.

Exercice TD17.52 (étude d'une fonction au voisinage de $+\infty$)

Soit la fonction

$$f : x \longmapsto (x+1)\cdot\exp\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1) Donner le domaine de définition de la fonction f.
2) Déterminer une droite Δ asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$, puis préciser la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ au voisinage de $+\infty$.

Exercice TD17.53 (valeurs des dérivées itérées d'une fonction en 0)

Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^3}{1+x^6} \end{array} \right.$$

1) Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
2) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f^{(n)}(0)$.

Exercice TD17.54 (DL d'une fonction réciproque)

Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^3+x+1 \end{array} \right.$$

1) Démontrer que la fonction f est bijective.
2) Démontrer que la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
3) Donner le $\mathrm{DL}_3(1)$ de f^{-1}.
4) Donner un équivalent de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice TD17.55 (DL d'une fonction réciproque)

Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\cdot\exp\left(x^2\right) \end{array} \right.$$

1) Démontrer que la fonction f est bijective.
2) Démontrer que la fonction f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$.
3) Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f^{-1}.

EXERCICE TD17.56 (DL D'UNE FONCTION RÉCIPROQUE)

Soit la fonction

$$f \;\left|\; \begin{array}{ccc} \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \tan^3(x)+3\cdot\tan(x) \end{array}\right.$$

1) Démontrer que la fonction f induit une bijection, notée g, de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

2) Démontrer que la fonction g^{-1} est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I.

3) Donner le $\mathrm{DL}_3(0)$ de g^{-1}.

EXERCICE TD17.57 (DA D'UNE SUITE D'INTÉGRALES)

Démontrer que

$$u_n := \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \underset{n\to+\infty}{\sim} 1-\frac{\ln(2)}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \left[\text{DA avec une précision de } \frac{1}{n}\right]$$

EXERCICE TD17.58 (DA D'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$

$$u_{n+1}=\sqrt{u_n+n^2}$$

1) Démontrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}$, $n-1\leqslant u_n\leqslant n$.

2) Démontrer que l'on a le DA avec la précision $\frac{1}{n}$ suivant

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} n-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{n}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

EXERCICE TD17.59 (DA D'UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_0=0$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$

$$u_{n+1}=\frac{e^{-u_n}}{n+1}$$

1) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers 0.

2) Donner un développement asymptotique de u_n avec la précision $\frac{1}{n^3}$.

EXERCICE TD17.60 (LEMME DE CESÀRO ET ÉQUIVALENT D'UNE SUITE RÉCURRENTE)

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels, qui converge vers une limite ℓ. Démontrer

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n}u_k \longrightarrow \ell \qquad \text{[lemme de Cesàro, cf. DS6]}$$

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $u_0=\frac{\pi}{4}$ et, pour tout $n\in\mathbf{N}$

$$u_{n+1}=\sin(u_n)$$

converge et préciser sa limite.

3) Démontrer qu'il existe un réel α tel que $\frac{1}{u_{n+1}^\alpha}-\frac{1}{u_n^\alpha}$ possède une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$.

4) En déduire un équivalent de u_n.

Exercice TD17.61 (vitesse de convergence d'une suite définie de manière implicite)

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'équation

$$x^n + x^2 = 1$$

d'inconnue $x \in \mathbf{R}_+^*$, admet une unique racine, notée x_n.

2) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser $\ell := \lim u_n$.

3) Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

Exercice TD17.62 (DA à deux termes d'une suite définie de manière implicite)

1) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 2$, l'équation

$$x^n - nx + 1 = 0$$

d'inconnue $x \in [0,1]$, admet une unique racine, notée x_n.

2) Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge et préciser $\ell := \lim u_n$.

3) Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice TD17.63 (équivalent de la somme des factorielles)

Démontrer

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!$$

Exercice TD17.64 (équivalent du plus grand coefficient binomial sur une ligne)

Déterminer un équivalent de $\displaystyle\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Exercice TD17.65 (équivalent d'une somme de série de Riemann divergente)

Soit $\alpha \in]0,1[$. En encadrant, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$, démontrer

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Exercice TD17.66 (équivalent d'une somme)

En encadrant, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, démontrer

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\sqrt{n}$$

Exercice TD17.67 (une fonction plate en 0)

Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbf{R}$ et qu'il existe $(P_n, k_n) \in \mathbf{R}[X] \times \mathbf{N}$ tel que

$$f^{(n)} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\cdot\dfrac{P_n(x)}{x^{k_n}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la fonction f possède un $\mathrm{DL}_n(0)$ et le préciser.

Exercice TD17.68 (de la non-dérivation d'un DL)

Démontrer que, si f est une fonction définie sur un intervalle I, dérivable sur I, admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ où $(a,n) \in I \times \mathbf{N}^*$, alors sa dérivée f' n'admet pas nécessairement de $\mathrm{DL}_{n-1}(a)$.