FEUILLE D'EXERCICES N°16

POLYNÔMES

NOTATION — Dans toute cette feuille, $\mathbf{K}$ désigne un corps.

EXERCICE TD16.1 (ÉQUATION POLYNOMIALE)
Résoudre l'équation
$$\left(X^2+1\right) P''-6P=0$$
d'inconnue $P \in \mathbf{K}[X]$.

EXERCICE TD16.2 (RESTE D'UNE DIVISION EUCLIDIENNE)
Soient $P \in \mathbf{K}[X]$ et a, b deux éléments distincts de $\mathbf{K}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $\widetilde{P}(a)$ et $\widetilde{P}(b)$.

EXERCICE TD16.3 (RESTE D'UNE DIVISION EUCLIDIENNE)
Soient $\alpha \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(\operatorname{sh}(\alpha)\, X+\operatorname{ch}(\alpha))^n$ par X^2-1.

EXERCICE TD16.4 (RESTE D'UNE DIVISION EUCLIDIENNE)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n}+(X-2)^n-2$ par $(X-2)^2$.

EXERCICE TD16.5 (DIVISIBILITÉ, RACINES ET MULTIPLICITÉS)
Soient A et B des polynômes de $\mathbf{K}[X]$.

1) Démontrer
$$B \mid A \quad \Longrightarrow \quad \left(\forall \alpha \in \operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(B) \quad \alpha \in \operatorname{Spec}_{\mathbf{K}}(A) \text{ et } \operatorname{mult}(\alpha, B) \leqslant \operatorname{mult}(\alpha, A)\right)$$

2) Étudier la réciproque de l'implication énoncée en 1.

EXERCICE TD16.6 (FACTORISATION D'UN POLYNÔME DE $\mathbf{R}[X]$ POSSÉDANT UNE RACINE DANS $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ possédant une racine $\alpha \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.

1) Justifier que $\overline{\alpha}$ est racine de P et que $\operatorname{mult}(\alpha, P)=\operatorname{mult}(\overline{\alpha}, P)$.
2) Posons $m:=\operatorname{mult}(\alpha, P)$. Démontrer qu'il existe $Q \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P=\left(X^2-2\operatorname{Re}(\alpha)\, X+|\alpha|^2\right)^m Q$.

EXERCICE TD16.7 (ÉQUATION POLYNOMIALE ET DIVISIBILITÉ)
Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{R}_5[X]$ tels que $(X-1)^3 \mid P+1$ et $(X+1)^3 \mid P-1$.

EXERCICE TD16.8 (INVARIANCE PAR SUBSTITUTION $X \leftarrow X+1$)
Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ tel que $P(X)=P(X+1)$. Démontrer que P est constant.

EXERCICE TD16.9 (SIGNES DES DÉRIVÉES ITÉRÉES D'UNE FONCTION POLYNOMIALES EN UN RÉEL)
Soient $a \in \mathbf{R}$ et $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Démontrer que si $\widetilde{P}(a)>0$ et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\widetilde{P}^{(k)}(a) \geqslant 0$, alors P ne possède aucune racine dans $[a,+\infty[$.

EXERCICE TD16.10 (EXPONENTIELLE TRONQUÉE)
Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que $P_n:=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbf{C}[X]$ ne possède aucune racine multiple.

EXERCICE TD16.11 (FACTORISATION DANS $\mathbf{R}[X]$)
Factoriser X^8+1 dans $\mathbf{R}[X]$ avec des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré 2 à discriminants strictement négatifs.

Exercice TD16.12 (factorisation dans $\mathbf{R}[X]$)

Factoriser $\left(X^2 - X + 1\right)^2 + 1$ dans $\mathbf{R}[X]$ avec des polynômes de $\mathbf{R}[X]$ de degré 2 à discriminants strictement négatifs.

Exercice TD16.13 (dérivée d'une composée)

Soit $Q \in \mathbf{K}[X]$.

1) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, le polynôme dérivé de Q^n.
2) Soit $P \in \mathbf{K}[X]$. Démontrer que $(P \circ Q)' = Q' \times \left(P' \circ Q\right)$.

Exercice TD16.14 (polynômes de Legendre)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $Q_n := \left(X^2 - 1\right)^n$ et $P_n := Q_n^{(n)}$.

1) Calculer P_1, P_2, P_3.
2) Déterminer deux polynômes non nuls A et B de $\mathbf{R}[X]$ tels que $A\,Q_n' + B\,Q_n = 0$.
3) Démontrer $\left(X^2 - 1\right) P_n'' + 2X\,P_n' - n(n+1)\,P_n = 0$.

Exercice TD16.15 (système d'équations algébriques)

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1+i \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 2i \\ & & & & abc & = & 4-4i \end{array}\right.$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$.

Exercice TD16.16 (système d'équations algébriques)

Résoudre le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & = & 1 \\ a^2 & + & b^2 & + & c^2 & = & 9 \\ \dfrac{1}{a} & + & \dfrac{1}{b} & + & \dfrac{1}{c} & = & 1 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(a, b, c) \in \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$.

Exercice TD16.17 (théorème des degrés échelonnés)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(P_0, P_1, \ldots, P_n) \in \mathbf{K}[X]^{n+1}$.

1) On suppose que $0 \leqslant \deg(P_0) < \deg(P_1) < \ldots < \deg(P_n)$. Démontrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est libre, i.e.

$$\forall\,(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{K}^n \quad \lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

2) On suppose que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = k$. Démontrer que $\mathrm{Vect}\,(P_0, P_1, \ldots, P_n) = \mathbf{K}_n[X]$.

Exercice TD16.18 (polynôme divisible par son polynôme dérivé)

Déterminer les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Exercice TD16.19 (idéaux de $\mathbf{K}[X]$)

Une partie I de $\mathbf{K}[X]$ est appelé idéal de $\mathbf{K}[X]$ si

(a) I est un sous-groupe de $(\mathbf{K}[X], +)$
(b) I est absorbant, i.e., pour tout $(P, A) \in \mathbf{K}[X] \times I$, $PA \in I$.

On se propose de décrire tous les idéaux de $\mathbf{K}[X]$.

1) Soit $A \in \mathbf{K}[X]$. Démontrer que

$$A\mathbf{K}[X] := \left\{QA \,:\, Q \in \mathbf{K}[X]\right\}$$

est un idéal de $\mathbf{K}[X]$.

2) Soit I un idéal de $\mathbf{K}[X]$ distinct de $\{0\}$. Démontrer qu'il existe $A \in \mathbf{K}[X]$ tel que $I = A\mathbf{K}[X]$. On pourra s'inspirer de la démonstration donnée de la description des sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$.

EXERCICE TD16.20 (PRESCRIPTION DES VALEURS DES DÉRIVÉS ITÉRÉS D'UN POLYNÔME EN UN POINT)

Soit $a \in \mathbf{K}$.

1) Calculer, pour tout $(k,\ell) \in \mathbf{N}^2$, $\left((X-a)^k\right)^{(\ell)}$.

2) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Démontrer que l'application

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \left(\widetilde{P}^{(0)}(a), \widetilde{P}^{(1)}(a), \dots, \widetilde{P}^{(n)}(a)\right) \end{array} \right.$$

est linéaire, i.e.

$$\forall (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall (P_1,P_2) \in \mathbf{K}^2 \qquad f(\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) = \lambda_1 f(P_1) + \lambda_2 f(P_2)$$

et bijective.

EXERCICE TD16.21 (UNE FAMILLE DE POLYNÔMES LIÉE AUX POLYNÔMES DE TCHEBYCHEV)

Soit $n \in \mathbf{N}$.

1. Démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que

$$\forall z \in \mathbf{C}^* \quad P\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

2. Démontrer que toutes les racines de P sont réelles, simples et qu'elles appartiennent à $[-2,2]$. On pourra considérer $P\left(e^{i\theta}\right)$ où $\theta \in \mathbf{R}$.

EXERCICE TD16.22 (ÉQUATION POLYNOMIALE)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que $P\left(X^2\right) = P(X)P(X+1)$.