Feuille d'exercices n°15

Limites, continuité dérivabilité

Exercice TD15.1 (boules, ouverts et fermés de R)

Si $x \in \mathbf{R}$ et $r > 0$, on appelle boule ouverte de centre x et de rayon r la partie $B(x,r)$ de $\mathbf{R}$ définie par

$$B(x,r) := \{y \in \mathbf{R} : |y-x| < r\} =]x-r, x+r[\,.$$

Une partie U de $\mathbf{R}$ est un ouvert si

$$\forall x \in U \quad \exists r_x > 0 \quad B(x, r_x) \subset U\,.$$

Une partie F de $\mathbf{R}$ est un fermé si son complémentaire $\mathbf{R} \setminus F$ est un ouvert.

1) Soient $a \in \mathbf{R}$ et $r > 0$. Démontrer que $B(a,r)$ est un ouvert.

2) Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille finie d'ouverts indexée par un ensemble I non vide. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} U_i$ est un ouvert. En déduire un énoncé pour les intersections de fermés.

3) Soient $x \in \mathbf{R}$ et $r \geqslant 0$. Démontrer que la boule fermée de centre x et de rayon r définie par

$$B_f(x,r) := \{y \in \mathbf{R} : |y-x| \leqslant r\} = [x-r, x+r]\,.$$

est un fermé.

4) Soient $n \in \mathbf{N}^*$ et $(U_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille finie d'ouverts. Démontrer que $\bigcap_{i=1}^{n} U_i$ est un ouvert. En déduire un énoncé pour les réunions finies de fermés.

5) Démontrer que l'intersection $\bigcap_{n=1}^{+\infty} B\left(0, \frac{1}{n}\right)$ d'ouverts n'est pas un ouvert.

6) Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Démontrer que la partie A est un fermé si et seulement si pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de points de A qui converge vers un réel ℓ, le nombre ℓ appartient à A.

7) Démontrer que $A := [0,1[$ n'est ni un ouvert, ni un fermé.

8) Soient les parties A et B de $\mathbf{R}$ définies par

$$B := \{x \in \mathbf{R} : \sin(x) \leqslant \cos(x)\} \qquad \text{et} \qquad C := \{x \in \mathbf{R} : \operatorname{Arctan}(x) < x\cos(x)\}\,.$$

Démontrer que B est un fermé et que C est un ouvert.

9) Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}$ si et seulement si, pour tout ouvert U de $\mathbf{R}$, $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbf{R}$. En déduire une caractérisation de la continuité de f via les fermés.

Exercice TD15.2 (fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ non majorée)

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction non majorée sur $[0,+\infty[$.

1) La fonction f a-t-elle nécessairement pour limite $+\infty$ en $+\infty$?

2) Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [0,+\infty[^{\mathbf{N}}$ telle que $f(u_n) \longrightarrow +\infty$.

3) On suppose de plus que la fonction f est continue sur $[0,+\infty[$. Construire une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in [0,+\infty[^{\mathbf{N}}$ telle que $u_n \longrightarrow +\infty$ et $f(u_n) \longrightarrow +\infty$.

Exercice TD15.3 (Fonction croissante, limite à droite, limite à gauche)

Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante sur I et a un point intérieur de I (il existe donc $\delta > 0$ tel que $[a-\delta, a+\delta]$). Démontrer que les limites $\lim\limits_{a^-} f$ et $\lim\limits_{a^+} f$ existent et sont finies. Égalent-elles nécessairement $f(a)$?

Exercice TD15.4 (forme indéterminée 1^∞)

Étudier la limite éventuelle de

$$(1+\sin(x))^{\frac{1}{x}}$$

lorsque x tend vers 0.

Exercice TD15.5 (limite et taux d'accroissement)

1) Étudier la limite éventuelle de

$$\frac{\ln\left(\sin^2(x)\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$$

lorsque x tend vers $\frac{\pi}{2}$.

2) Étudier la limite éventuelle de

$$\frac{\operatorname{Arcsin}\left(x^2-x\right)}{\sqrt{\sin\left(x^2\right)}}$$

lorsque x tend vers 0.

Exercice TD15.6 (positivité locale)

Soit f la fonction définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2+x+1}{\sin(x)+2} + \dfrac{e^x}{2023} - \dfrac{1}{2} \,. \end{array} \right.$$

Justifier qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [-\delta, \delta] \quad f(x) > 0\,.$$

Exercice TD15.7 (continuité d'une fonction définie par morceaux)

Étudier la continuité de la fonction suivante.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0\,; \\ \dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \text{si } x \neq 0\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice TD15.8 (continuité, rationnels et irrationnels)

Étudier la continuité de la fonction suivante.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2\, \mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x) \,+\, x\, \mathbb{1}_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)\,. \end{array} \right.$$

Exercice TD15.9 (Prolongement par continuité et fonctions trigonométriques)

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. \qquad\qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \cos(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right.$$

Exercice TD15.10 (Prolongement par continuité et partie entière)

Étudier le prolongement par continuité éventuel en 0 des deux fonctions suivantes.

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right. \qquad\qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor \end{array} \right.$$

Exercice TD15.11 (Fonction périodique ayant une limite en $+\infty$)

Soient $T > 0$ et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction T-périodique qui possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Démontrer que la fonction f est constante.

Exercice TD15.12 (Polynôme à coefficients réels de degré impair)

Soient n un nombre entier naturel impair et $(a_k)_{k\in[\![0,n-1]\!]} \in \mathbf{R}^n$. Démontrer que la fonction polynomiale

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \end{array} \right.$$

s'annule au moins une fois sur $\mathbf{R}$.

Exercice TD15.13 (Application continue de $[0,1]$ dans lui-même)

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue sur $[0,1]$. Démontrer que f possède un point fixe.

Exercice TD15.14 (Égalité de deux fonctions en valeur absolue)

Soient $a < b$ des réels, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ et $g : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ des applications continues sur $]a,b[$. On suppose que $|f| = |g|$ et que, pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) \neq 0$. Démontrer $f = g$ ou $f = -g$.

Exercice TD15.15 (Continuité et barycentre de deux points)

Soient p,q deux nombres réels strictement positifs et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) \neq f(1)$. Démontrer que

$$\exists c \in]0,1[\quad p\,f(0) + q\,f(1) = (p+q)\,f(c)\,.$$

Exercice TD15.16 (Fonction continue sur $\mathbf{R}$ avec limite $+\infty$ en les infinis)

Soient $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$. Démontrer que f possède un minimum sur $\mathbf{R}$.

Exercice TD15.17 (Fonction continue sur $[0,1]$ et valeurs antipodales égales)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Démontrer que

$$\exists c \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

Exercice TD15.18 (Équation fonctionnelle et continuité)

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue en 0 telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2 \quad f(u+v) = f(u) + f(v) .$$

1) Démontrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
2) Démontrer que, pour tout $r \in \mathbf{Q}$, $f(r) = r\, f(1)$.
3) En déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(r) = x\, f(1)$.

Exercice TD15.19 (Point fixe et direction asymptotique)

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}_+$ continue sur $\mathbf{R}^+$ telle qu'il existe $\ell < 1$ vérifiant $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$. Démontrer que f possède un point fixe.

Exercice TD15.20 (Fonction périodique continue)

Soient $T > 0$ et $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction T-périodique.
1) La fonction f est-elle nécessairement majorée (resp. minorée) sur $\mathbf{R}$?
2) On suppose de plus que la fonction f est continue sur $\mathbf{R}$. Démontrer qu'alors la fonction f admet un minimum et maximum global (i.e. sur $\mathbf{R}$).

Exercice TD15.21 (Monotonie et continuité)

Soit une fonction $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction croissante telle que la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_{>0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

est décroissante.
1) Démontrer que la fonction g est continue sur $\mathbf{R}_{>0}$.
2) La fonction f est-elle continue sur $\mathbf{R}_+$?

Exercice TD15.22 (Limites avec paramètres)

1) Soient des réels a et b. Étudier la limite éventuelle de

$$\frac{\ln\left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)}{\sin\left(\dfrac{x+a}{x^2+b^2}\right)}$$

lorsque x tend vers $+\infty$.
2) Soient des réels strictement positifs a, b et c. Étudier la limite éventuelle de

$$\left(\frac{a^{\frac{1}{x}} + b^{\frac{1}{x}} + c^{\frac{1}{x}}}{3}\right)^x$$

lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice TD15.23 (dérivabilité et inverse)

1) Soit $a \in \mathbf{R}^*$. Démontrer que la fonction inverse

$$\text{inv} \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \right.$$

est dérivable en a avec pour nombre dérivée $\text{inv}'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$.

2) Soient I un intervalle non vide et non réduit à un point et $x_0 \in I$. Soit $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction qui ne s'annule pas en x_0 et qui est dérivable en x_0. Justifier que

$$\exists \delta > 0 \quad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I \quad f(x) \neq 0$$

puis que la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \cap I & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right.$$

est dérivable en x_0 avec comme nombre dérivé $g'(x_0) = -\dfrac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

Exercice TD15.24 (composition de deux DL1)

Soient I, J deux intervalles de $\mathbf{R}$, $a \in I$, $f\colon I \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction telle que $f(I) \subset J$ et $g\colon J \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction. On suppose que f possède un DL1 en a, i.e. qu'il existe $(\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbf{R}^2$, $\delta_1 > 0$ et $\varepsilon_1 \in \mathbf{R}^{[a-\delta_1, a+\delta_1]}$ tels que

$$\varepsilon_1(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in I \cap [a - \delta_1, a + \delta_1] \quad f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + (x-a)\varepsilon_1(x)$$

et que g possède un DL1 en $f(a)$, i.e. qu'il existe $(\beta_0, \beta_1) \in \mathbf{R}^2$, $\delta_2 > 0$ et $\varepsilon_2 \in \mathbf{R}^{[f(a)-\delta_2, f(a)+\delta_2]}$ tels que

$$\varepsilon_2(y) \xrightarrow[y \to f(a)]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall y \in J \cap [f(a) - \delta_2, f(a) + \delta_2] \quad g(y) = \beta_0 + \beta_1(y - f(a)) + (y - f(a))\varepsilon_2(y)\,.$$

1) Justifier qu'il existe $\delta \in \,]0, \delta_1]$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a - \delta, a + \delta] \quad f(x) \in J \cap [f(a) - \delta_2, f(a) + \delta_2]\,.$$

2) Déterminer $(\gamma_0, \gamma_1) \in \mathbf{R}^2$ et $\varepsilon \in \mathbf{R}^{[a-\delta, a+\delta]}$ tel que

$$\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \qquad \text{et} \qquad \forall \in I \cap [a - \delta, a + \delta] \quad g(f(x)) = \gamma_0 + \gamma_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)\,.$$

Exercice TD15.25 (dérivabilité d'une fonction)

Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}'$ des points de $\mathbf{R}$ où la fonction f suivante est dérivable et calculer, pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x)$.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \cos\left(\sqrt{|x|}\right)\,. \end{array} \right.$$

Exercice TD15.26 (Ajustement de paramètres et caractère $\mathscr{C}^1$)

Déterminer $a \in \mathbf{R}$ et $x_0 > 0$ pour que la fonction f suivante soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < x_0 \\ x^2+12 & \text{si } x \geqslant x_0\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice TD15.27 (Dérivabilité d'une fonction définie par morceaux)

Déterminer l'ensemble $\mathscr{D}'$ des points de $\mathbf{R}$ où la fonction f suivante est dérivable et calculer, pour tout $x \in \mathscr{D}'$, $f'(x)$.

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \cos\left(\sqrt{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\left(\sqrt{-x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

Exercice TD15.28 (Dérivées itérées du carré de la fonction Arcsin)

Soit la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Arcsin}^2(x)\,. \end{array} \right.$$

1) Démontrer que la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et qu'il existe quatre fonctions polynomiales $P1, P_2, P_3, P_4$ telles que

$$\forall x \in]-1,1[\quad P_1(x)\,f''(x) + P_2(x)\,f'(x) + P_3(x)\,f(x) + P_4(x) = 0\,.$$

2) En déduire que la fonction f est indéfiniment dérivable sur $]-1,1[$.
3) Déterminer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une relation de récurrence entre $f^{(n+2)}(0)$ et $f^{(n)}(0)$.
4) En déduire, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

Exercice TD15.29 (Calculs de sommes et nombres dérivées à droite en 0)

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $S_n := \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

1) Démontrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge. On note S la limite.
2) Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable à droite en 0 telle que $f(0) = 0$. On pose $\lambda := f'_d(0)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$

$$d_n(f) := \sum_{k=n}^{2n} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

Démontrer que la suite $\left(d_n(f)\right)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est convergente, de limite λS.
3) Déterminer la valeur de S à l'aide de la fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$.
4) Démontrer que la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$ existe et déterminer sa valeur.
5) Démontrer que la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{2n} \sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$ existe et déterminer sa valeur.

EXERCICE TD15.30 (SOMME ET MOITIÉ DU NOMBRE DÉRIVÉ EN 0)

Soit $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}$, telle que $f(0) = 0$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer que

$$\exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geqslant N \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad -\varepsilon \frac{k}{n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f'(0)\,\frac{k}{n^2} \leq \varepsilon \frac{k}{n^2}.$$

2) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{f'(0)}{2}.$$

EXERCICE TD15.31 (CN POUR QU'UN POLYNÔME AIT UNE RACINE DANS $]0,1[$)

Soient $n \in \mathbf{N}^*$, $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} = 0$. Démontrer que la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{array} \right.$$

s'annule au moins une fois sur $]0,1[$.

EXERCICE TD15.32 (POLYNÔME À COEFFICIENTS RÉELS SCINDÉ SUR R)

Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $(a_k)_{k \in [\![0,n]\!]} \in \mathbf{R}^{n+1}$ tel que $a_n \neq 0$ et $P := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On suppose que P possède n-racines réelles $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux-à-deux distinctes que l'on peut supposer rangées dans l'ordre croissant. Démontrer que le polynôme $P' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$ possède $n-1$ racines réelles deux-à-deux distinctes.

EXERCICE TD15.33 (SOLUTION D'UNE ÉQUATION POLYNÔME VS. EXPONENTIELLE)

Soit P un polynôme à coefficients réels. On considère l'équation

$$(E) \; : \; P(x) = e^x$$

d'inconnue $x \in \mathbf{R}$.

1) Montrer que l'équation (E) n'admet qu'un nombre fini de solutions.
2) Proposer un majorant du nombre de solutions de l'équation (E).

EXERCICE TD15.34 (NON ANNULATION DE LA DÉRIVÉE ET SIGNE CONSTANT)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable sur $[0,1]$, telle que $f(0) = 0$ et, pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) \neq 0$. Démontrer que f garde un signe constant sur $[0,1]$.

EXERCICE TD15.35 (UN PAS VERS LA CONVEXITÉ)

Soit $f : \mathbf{R}_+ \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$, dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$, telle que $f(0) = 0$ et f' est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$. Démontrer que la fonction « pente en 0 », définie ci-dessous, est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

Exercice TD15.36 (Autour de la notion d'asymptote oblique)

Soit $f\colon \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ telle que $x f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Démontrer que f admet une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ en $+\infty$, puis que $\ell = +\infty$.

Exercice TD15.37 (Différence entre deux pentes en un point)

Soient deux réels a, b tels que $a < b$, $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que f' est dérivable sur $]a,b[$. Démontrer

$$\exists\, x \in\,]a,b[\quad f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c)\,.$$

Exercice TD15.38 (Suite récurrente et application contractante)

Soit la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^* & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & 2 + \dfrac{1}{x^2} \end{array} \right. .$$

1) Démontrer que $I = [2,3]$ est stable par f.
2) Montrer que la fonction f est $\dfrac{1}{4}$-lipschitzienne sur I.
3) Démontrer que f possède un unique point fixe α sur I.
4) Soit (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 = 2$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

valable pour tout $n \in \mathbf{N}$. Démontrer que (u_n) converge vers α et discuter la vitesse de convergence vers 0 de la suite $(u_n - \alpha)$.