Feuille d'exercices n°14

Calcul matriciel et systèmes linéaires

Exercice TD14.1 (un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$)

Soit E la partie de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ définie par

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} 4a+b & 7a \\ -2a & -5a+b \end{pmatrix} \,:\, (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.$$

1) Écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, puis en déduire une propriété de stabilité de E.

2) On pose $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. Démontrer que $A^2 + A - 6I_2 = 0$ et en déduire que E est stable par produit. Que dire de E relativement à $(\mathscr{M}_2(\mathbf{R}), +, \times)$?

3) Résoudre l'équation $X^2 = X$ d'inconnue X un élément de E.

Exercice TD14.2 (quaternions)

Soit E la partie de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ dont les éléments sont les matrices de la forme

$$M(a,b,c,d) := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

où $(a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$.

1) Écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$, puis en déduire une propriété de stabilité de E.

2) Démontrer que E est un sous-anneau de $(\mathscr{M}_4(\mathbf{R}), +, \times)$.

3) Calculer, pour tout $M \in E$, le produit $M\,M^\top$. Qu'en déduire ?

Exercice TD14.3 (dynamique de deux populations)

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels indexées par $\mathbf{N}$, vérifiant, pour tout $n \in \mathbf{N}$

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} u_{n+1} & = & bu_n & + & (b-a)v_n \\ v_{n+1} & = & (-a-b)u_n & - & bv_n\,. \end{array} \right.$$

1) Donner une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

2) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.

3) Calculer les puissances des matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis celles de la matrice A.

4) Donner, pour tout $n \in \mathbf{N}$, une expression de u_n et v_n en fonction de a, b, u_0, v_0.

EXERCICE TD14.4 (CRITÈRE POUR DE NULLITÉ POUR UNE COMPOSANTE D'UN COUPLE DE MATRICES)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbf{K}$ un corps. Soient $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})^2$ tel que, pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $AXB = 0$. Démontrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

EXERCICE TD14.5 (EXPONENTIELLE D'UNE MATRICE NILPOTENTE)

Soient un entier $n \geqslant 2$. Pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente, on note $\exp(N)$, la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \cdot N^k$ appelée exponentielle de N.

1) Justifier que $\exp(N)$ est bien définie, pour toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente.

2) Soient N_1 et N_1 des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, qui commutent ($N_1N_2 = N_2N_1$). Démontrer que $N_1 + N_2$ est nilpotente, puis que $\exp(N_1 + N_2) = \exp(N_1) \times \exp(N_2)$.

3) Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que la matrice $\exp(N)$ est inversible et déterminer $\exp(N)^{-1}$.

4) Calculer $\exp(A)$ pour la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

EXERCICE TD14.6 (UN SOUS-ANNEAU DE $\mathcal{T}_3^+(\mathbf{R})$)

On définit la partie E de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ et la matrice J de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ par

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \right\} \qquad \text{et} \qquad J := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, J^n.

2) Écrire E comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'un nombre fini de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$, puis en déduire une propriété de stabilité de E.

3) Démontrer que E est stable par multiplication. Que déduire de E relativement à $\left(\mathcal{T}_3^+(\mathbf{R}), +, \times\right)$?

4) Soit $M \in E$. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, M^n.

EXERCICE TD14.7 (PUISSANCES D'UNE MATRICE)

Soient $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et $A := \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, A^n.

EXERCICE TD14.8 (INVERSIBILITÉ ET INVERSE D'UNE MATRICE)

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & -12 \\ 2 & 0 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2) Résoudre le système linéaire

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 3y & - & 12z & = & 2 \\ 2x & & & - & 8z & = & 4 \\ x & - & y & - & 2z & = & 6 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$.

Exercice TD14.9 (matrice de Jordan équivalente)

Déterminer
(a) un entier $r \in [\![1,3]\!]$,
(b) une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ produit de matrices de transposition/transvection/dilatation,
(c) une matrice $Q \in GL_3(\mathbf{R})$ produit de matrices de transposition/transvection
tels que

$$PAQ = J_{3,3}(r) \qquad \text{où } A := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -7 & 9 & 15 \\ -5 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

Exercice TD14.10 (matrice de Jordan équivalente)

Déterminer
(a) un entier $r \in [\![1,3]\!]$,
(b) une matrice $P \in GL_3(\mathbf{R})$ produit de matrices de transposition/transvection/dilatation,
(c) une matrice $Q \in GL_4(\mathbf{R})$ produit de matrices de transposition/transvection
tels que

$$PAQ = J_{3,4}(r) \qquad \text{où } A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice TD14.11 (matrice de Jordan équivalente)

Soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Déterminer
(a) un entier $r \in [\![1,3]\!]$,
(b) une matrice $P \in GL_4(\mathbf{R})$ produit de matrices de transposition/transvection/dilatation,
(c) une matrice $Q \in GL_3(\mathbf{R})$ produit de matrices de transposition/transvection
tels que

$$PAQ = J_{4,3}(r) \qquad \text{où } A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice TD14.12 (inversibilité et inverse d'une matrice)

Démontrer que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Exercice TD14.13 (inversibilité et inverse d'une matrice)

Démontrer que la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Exercice TD14.14 (calculs de puissances par trigonalisation)

Soient les matrices
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P := \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Démontrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Calculer la matrice $T := P^{-1}AP$.
3) On pose $T = D + N$ où $D \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ est diagonale et $N \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ est nilpotente. Calculer, pour tout $n \in \mathbf{N}$, D^n, N^n, B^n et A^n.

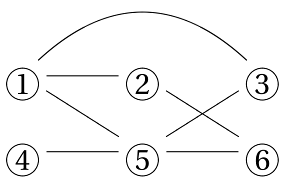
Exercice TD14.15 (matrices de permutation)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbf{K}$ un corps. On rappelle que S_n désigne l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on définit la matrice $P_\sigma \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par
$$P_\sigma = \sum_{i=1}^{n} E_{\sigma(i),i}\,.$$

1) Démontrer que pour tout $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2$, $P_{\sigma_1} \times P_{\sigma_2} = P_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$.
2) Démontrer que $\mathscr{P} := \{P_\sigma \,:\, \sigma \in S_n\}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{K}), \times)$.
3) Que peut-on dire de l'application suivante ?
$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathscr{P}, \times) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma \end{array} \right.$$

Exercice TD14.16 (chemin dans un graphe non orienté)

Soient un entier $n \geqslant 2$ et G un graphe non orienté dont les sommets sont numérotés de 1 à n. Si $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on dit que les sommets i et j du graphe G sont voisins s'ils sont joints par une arête. On note $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ la matrice d'adjacence de G définie par, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$
$$[A]_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ et } j \text{ sont voisins ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ci-contre, se trouvent un exemple de graphe non orienté avec sa matrice d'adjacence.

1) Donner une propriété remarquable de la matrice A.
2) Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On appelle chemin de longueur k, tout $(k+1)$-uplet
$$(s_0, s_1, \ldots, s_k) \in [\![1,n]\!]^{k+1}$$
tel que, pour tout $i \in [\![0,k-1]\!]$, les sommets s_i et s_{i+1} sont voisins. Démontrer que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\left[A^k\right]_{i,j}$ est le nombre de chaînes de longueur k reliant les sommets i et j.

Exercice TD14.17 (CNS pour que deux matrices de transposition commutent)

Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{K}$ un corps, $(i_1, j_1, \lambda_1) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}$ et $(i_2, j_2, \lambda_2) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,n]\!] \times \mathbf{K}$ tels que $i_1 \neq j_1$ et $i_2 \neq j_2$. Donner une CNS pour que les matrices $T_{i_1,j_1}(\lambda_1) = I_n + \lambda_1 \cdot E_{i_1,j_1}$ et $T_{i_2,j_2}(\lambda_2) = I_n + \lambda_2 \cdot E_{i_2,j_2}$ commutent.