

FEUILLE D'EXERCICES N°13

STRUCTURES ALGÈBRIQUES USUELLES

EXERCICE TD13.1 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{R})

L'ensemble \mathbf{R} muni de la multiplication usuelle est-il un groupe?

EXERCICE TD13.2 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{R})

L'ensemble \mathbf{R} muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = |x + y|$ est-il un groupe?

EXERCICE TD13.3 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{R})

L'ensemble \mathbf{R} muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = \max\{x, y\}$ est-il un groupe?

EXERCICE TD13.4 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{R})

L'ensemble \mathbf{R} muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = x + y - xy$ est-il un groupe?

EXERCICE TD13.5 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{R})

Soit n un nombre entier naturel impair. L'ensemble \mathbf{R} muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x * y = \sqrt[n]{x^n + y^n}$ est-il un groupe?

EXERCICE TD13.6 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$)

L'ensemble $\mathbf{R}^* \times \mathbf{R}$ muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\mathbf{R}^* \times \mathbf{R})^2$, $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = \left(x_1 x_2, \frac{y_1}{x_2} + x_1 y_2\right)$ est-il un groupe? La loi $*$ est-elle commutative?

EXERCICE TD13.7 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{R}^2)

L'ensemble \mathbf{R}^2 muni de la loi de composition interne définie par, pour tout $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in (\mathbf{R}^2)^2$, $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 e^{x_2} + y_2 e^{-x_1})$ est-il un groupe? La loi $*$ est-elle commutative?

EXERCICE TD13.8 (ÉTUDE D'UNE LOI DE COMPOSITION INTERNE SUR \mathbf{C})

L'ensemble \mathbf{C} de la loi de composition interne définie par, pour tout $(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$

$$z_1 * z_2 = z_1 z_2 + i(z_1 + z_2) - 1 - i$$

est-il un groupe? La loi $*$ est-elle commutative?

EXERCICE TD13.9 (STRUCTURE DE L'ENSEMBLE DES ÉLÉMENTS INVERSIBLES)

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition interne $*$ associative et admettant un neutre. On note $S(E)$ l'ensemble des éléments inversibles de E pour la loi $*$. Démontrer que $(S(E), *)$ est un groupe.

EXERCICE TD13.10 (GROUPE DONT TOUS LES CARRÉS VALENT LE NEUTRE)

Soit $(G, *)$ un groupe d'élément neutre noté e tel que, pour tout $x \in G$, $x^2 = e$. Démontrer que G est abélien.

EXERCICE TD13.11 (TABLE DU GROUPE À CINQ ÉLÉMENTS)

Ici e, a, b, c, d désignent cinq éléments distincts. Compléter la table suivante pour obtenir une loi de groupe sur $\{e, a, b, c, d\}$.

*	e	a	b	c	d
e					
a		b			
b	b				
c		e			
d					

EXERCICE TD13.12 (TRANSPORT D'UNE LOI DE GROUPE)

Soient $(G_1, *_1)$, G_2 un ensemble et $f: G_1 \longrightarrow G_2$ une bijection. On pose, pour tout $(x_2, y_2) \in G_2^2$

$$x_2 *_2 y_2 := f(f^{-1}(x_2) *_1 f^{-1}(y_2)).$$

Démontrer que $(G_2, *_2)$ est un groupe. Que dire de f ?

EXERCICE TD13.13 (CENTRE D'UN GROUPE)

Soit $(G, *)$ un groupe. Le centre de G , noté $Z(G)$ est formé des éléments de G qui commutent avec tous les autres, i.e.

$$Z(G) := \{x \in G : \forall y \in G \quad x * y = y * x\}.$$

Démontrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

EXERCICE TD13.14 (UNION D'UNE FAMILLE FILTRANTE DE SOUS-GROUPES)

Soient $(G, *)$ un groupe et $(H_i)_{i \in I}$ une famille de sous-groupes de $(G, *)$ telle que pour tout $(i, j) \in I^2$ il existe $k \in I$ vérifiant $H_i \subset H_k$ et $H_j \subset H_k$. Démontrer que $\bigcup_{i \in I} H_i$ est un sous-groupe de $(G, *)$.

EXERCICE TD13.15 (SOMME DIRECTE DE SOUS-GROUPES)

Soient $(G, *)$ un groupe dont l'élément neutre est noté e et H_1, H_2 deux sous-groupes de $(G, *)$. On pose

$$H_1 * H_2 := \{h_1 * h_2 : (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2\}.$$

On suppose que tout élément de H_1 commute avec tout élément de H_2 .

- 1) Démontrer que $H_1 * H_2$ est un sous-groupe de $(G, *)$.
- 2) On suppose que $H_1 * H_2 = G$ et on introduit les deux assertions suivantes

$$P_1 : \langle H_1 \cap H_2 = \{e\} \rangle \quad \text{et} \quad P_2 : \langle \forall g \in G \quad \exists!(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2 \quad g = h_1 * h_2 \rangle.$$

Démontrer que P_1 et P_2 sont équivalentes.

EXERCICE TD13.16 (GROUPE DIÉDRAL ET RÉALISATION GÉOMÉTRIQUE)

Soient $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$ et les applications

$$r \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto z e^{i \frac{2\pi}{n}} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad s \left| \begin{array}{l} \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C} \\ z \longmapsto \bar{z}. \end{array} \right.$$

- 1) Interpréter géométriquement r et s .
- 2) Calculer r^n , s^2 et démontrer que, pour tout $k \in \mathbf{Z}$, $r^k \circ s = s \circ r^{-k}$.
- 3) Démontrer que $D := \{r^k \circ s^\ell : (k, \ell) \in \mathbf{Z}^2\}$ est un sous-groupe de $(S_{\mathbf{C}}, \circ)$.

EXERCICE TD13.17 (THÉORÈME DE LAGRANGE)

Soit $(G, *)$ un groupe fini dont l'élément neutre est noté e et H un sous-groupe de $(G, *)$. On se propose de démontrer que $\text{Card}(H)$ divise $\text{Card}(G)$ (théorème de Lagrange).

- 1) Démontrer que la relation \mathcal{R} définie sur G par, pour tout $(g_1, g_2) \in G^2$

$$g_1 \mathcal{R} g_2 \text{ si et seulement si } g_1 * g_2^{-1} \in H$$

est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence \bar{e} de e .

- 2) Démontrer que toutes les classes d'équivalences ont le même cardinal.
- 3) On note k le nombre de classes d'équivalence. Démontrer que $\text{Card}(G) = k \text{Card}(H)$.

EXERCICE TD13.18 (ORDRE D'UN ÉLÉMENT D'UN GROUPE FINI)

Soient $(G, *)$ un groupe fini de cardinal n dont l'élément neutre est noté e et $g \in G$.

- 1) Justifier que $m = \min \{k \in \mathbf{N}^* : g^k = e\}$ existe.
- 2) Démontrer que $\langle g \rangle := \{g^k : k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket\}$ est le plus petit sous-groupe de $(G, *)$ contenant g , puis à l'aide du théorème de Lagrange que m divise n .
- 3) Démontrer que $g^n = e$.
- 4) Soit $n \in \mathbf{N}_{\geq 2}$. Démontrer que le seul sous-groupe fini de (\mathbf{C}^*, \times) de cardinal n est \mathbf{U}_n .

EXERCICE TD13.19 (GROUPE ORDONNÉ)

Soient $(G, +)$ un groupe abélien dont l'élément neutre est noté 0 et \leq une relation d'ordre sur G compatible avec la loi $+$, i.e. que pour tout triplet $(g_1, g_2, g_3) \in G^3$

$$g_1 \leq g_2 \implies g_1 + g_3 \leq g_2 + g_3.$$

On pose $G_+ := \{g \in G : g \geq 0\}$ et $G_- := \{g \in G : g \leq 0\}$.

- 1) Démontrer que G_+ est stable pour la loi $+$.
- 2) Démontrer que $\{-g : g \in G_+\} = G_-$.
- 3) Démontrer que $G_+ \cap G_- = \{0\}$.
- 4) Démontrer que l'ordre \leq est total sur G si et seulement si $G_+ \cup G_- = G$.

EXERCICE TD13.20 (NILPOTENCE)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Un élément $a \in A$ est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $a^n = 0_A$.

- 1) Soit $(a, b) \in A^2$ tel que ab est nilpotent. Démontrer que ba est également nilpotent.
- 2) Soient a et b deux éléments nilpotents de A tels que $ab = ba$. Démontrer que $a + b$ est nilpotent.

EXERCICE TD13.21 (UNITÉS DE L'ANNEAU DES ENTIERS DE GAUSS)

On pose $\mathbf{Z}[i] := \{a + ib : (a, b) \in \mathbf{Z}^2\}$.

- 1) Démontrer que $\mathbf{Z}[i]$ est un sous-anneau de $(\mathbf{C}, +, \times)$.
- 2) Démontrer qu'un élément $z \in \mathbf{Z}[i]$ est inversible dans $\mathbf{Z}[i]$ si et seulement si $|z| = 1$. En déduire $U(\mathbf{Z}[i])$.

EXERCICE TD13.22 (UN PRODUIT DE CORPS N'EST PAS INTÈGRE)

Soient $(K_1, +_1, \times_1)$ et $(K_2, +_2, \times_2)$ deux corps. On définit deux lois de composition internes sur $K_1 \times K_2$ par

$$+ \left| \begin{array}{ccc} (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2) & \longrightarrow & K_1 \times K_2 \\ ((k_1, k_2), (k'_1, k'_2)) & \longmapsto & (k_1 +_1 k'_1, k_2 +_2 k'_2) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \times \left| \begin{array}{ccc} (K_1 \times K_2) \times (K_1 \times K_2) & \longrightarrow & K_1 \times K_2 \\ ((k_1, k_2), (k'_1, k'_2)) & \longmapsto & (k_1 \times_1 k'_1, k_2 \times_2 k'_2) \end{array} \right.$$

qui font de $(K_1 \times K_2, +, \times)$ un anneau commutatif. Démontrer que $(K_1 \times K_2, +, \times)$ n'est pas intègre.

EXERCICE TD13.23 (IDÉAL, RADICAL ET ANNEAU EUCLIDIEN)

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif intègre. Une partie I de A est un idéal de $(A, +, \times)$ si I est un sous-groupe de $(A, +)$ qui vérifie de plus

$$\forall (a, x) \in A \times I \quad ax \in I \quad (I \text{ est absorbant}).$$

- 1) Soient I_1 et I_2 deux idéaux de $(A, +, \times)$. Démontrer que $I_1 \cap I_2$,

$$I_1 + I_2 := \{x_1 + x_2 : (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2\} \quad \text{et} \quad I_1 I_2 := \{x_1 x_2 : (x_1, x_2) \in I_1 \times I_2\}$$

sont des idéaux de $(A, +, \times)$.

- 2) Démontrer que si $(A, +, \times)$ est un corps alors ses seuls idéaux sont $\{0_A\}$ et A .
- 3) Soit $a \in A$. Démontrer que

$$aA := \{ab : b \in A\}$$

est un idéal de $(A, +, \times)$.

- 4) Soit I un idéal de A . Démontrer que son radical \sqrt{I} défini par

$$\sqrt{I} := \{x \in A : \exists n \in \mathbf{N}^* \quad x^n \in I\}$$

est un idéal de $(A, +, \times)$.

- 5) On suppose dans cette question qu'il existe une application $v : A \setminus \{0_A\} \longrightarrow \mathbf{N}$ (appelée stathme euclidien) vérifiant les deux propriétés suivantes.

- (i) $\forall a \in A \quad \forall b \in A \setminus \{0_A\} \quad \exists (q, r) \in A^2 \quad a = bq + r$ et $(r = 0_A \text{ ou } v(r) < v(b))$
- (ii) $\forall (a, b) \in (A \setminus \{0_A\})^2 \quad v(b) \leq v(ab)$

Par exemple, la valeur absolue définit un stathme euclidien sur $(\mathbf{Z}, +, \times)$ et le degré définit un stathme euclidien sur l'anneau des polynômes en une indéterminée à coefficients dans \mathbf{R} . Démontrer que, pour tout idéal I de $(A, +, \times)$, il existe $x \in I$ tel que $I = xA$ (un tel élément x est appelé générateur de l'idéal I).

- 6) Soit un entier naturel $a \geq 2$ dont la décomposition en produit de facteurs premiers est

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$$

où $r \in \mathbf{N}^*$, p_1, \dots, p_r sont des premiers distincts et $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ sont des entiers naturels non nuls. Déterminer un générateur de l'idéal $\sqrt{a\mathbf{Z}}$ de $(\mathbf{Z}, +, \times)$.