Feuille d'exercices n°12

Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

TD12.1. Exercice (PPCM de deux entiers consécutifs) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \vee (n+1)$.

TD12.2. Exercice (Divisibilité et coefficients binomiaux) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)$ divise $\binom{2n}{n}$.

TD12.3. Exercice (Factorielle et primalité relative) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(n+1)!+1 \qquad \text{et} \qquad n!+1$$

sont premiers entre eux.

TD12.4. Exercice (Équation diophantienne d'ordre 1 en deux variables) Résoudre l'équation :

$$51x+38y=112$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

TD12.5. Exercice (Équation diophantienne d'ordre 1 en deux variables) Résoudre l'équation :

$$429x+700y=206$$

d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$.

TD12.6. Exercice (Divisibilité) Déterminer les entiers naturels n tels que $n+1$ divise n^2+1.

TD12.7. Exercice (PGCD de deux familles d'entiers) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(2k+1) \wedge (9k+1)$.

TD12.8. Exercice (PGCD et primalité relative) Soient a, b, c trois entiers naturels non nuls. Démontrer :

$$a \wedge c = 1 \quad \Longrightarrow \quad a \wedge b = a \wedge (bc)\,.$$

TD12.9. Exercice (PGCD et puissances) Soient a, b, n trois entiers naturels non nuls. Exprimer $a^n \wedge b^n$ en fonction de $a \wedge b$.

TD12.10. Exercice (Reste d'une division euclidienne) Déterminer le reste de la division euclidienne de $57\,383^{40}$ par 19.

TD12.11. Exercice (Famille de nombres divisibles par 19) Démontrer que 19 divise $2^{2^{6k+2}}+3$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

TD12.12. Exercice (Deux derniers chiffres) Déterminer les deux derniers chiffres de $7^{9^{9^9}}$.

TD12.13. Exercice ($\cos(2\pi/7)$ est irrationnel) Démontrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est racine du polynôme :

$$P := 8X^3+4X^2-4X-1$$

et en déduire que $\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)$ est irrationnel.

★ **TD12.14. Exercice (Nombres de Mersenne)** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième nombre de Mersenne, noté M_n, par $M_n = 2^n - 1$. Nous listons les douze premiers nombres de Mersenne ci-dessous.

$M_1 = 1$	$M_2 = 3$	$M_3 = 7$	$M_4 = 15$	$M_5 = 31$	$M_6 = 63$
$M_7 = 127$	$M_8 = 255$	$M_9 = 511$	$M_{10} = 1\,023$	$M_{11} = 2\,047$	$M_{12} = 4\,095$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que, si M_n est premier, alors n est premier.
2. Donner un nombre premier p tel que M_p n'est pas premier.
3. Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \leqslant n$.
   (a) Démontrer que si m divise n, alors M_m divise M_n.
   (b) On suppose que m ne divise pas n et on considère la division euclidienne de n par m :
   $$n = q \cdot m + r$$
   où $(q, n) \in \mathbb{N} \times [\![0, m-1]\!]$. Démontrer que $M_m \wedge M_n = M_m \wedge M_r$.
4. Démontrer que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^*$, $M_m \wedge M_n = M_{m \wedge n}$.

TD12.15. Exercice (Sommes des diviseurs) On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Div}(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n, i.e. :

$$\mathrm{Div}(n) := \left\{ d \in \mathbb{N}^* \ : \ d \text{ divise } n \right\}.$$

Nous nous proposons d'étudier la fonction « somme des diviseurs », notée σ et définie par :

$$\sigma \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{d \in \mathrm{Div}(n)} d\,. \end{array} \right.$$

Par exemple, $\sigma(1) = 1$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ et $\sigma(15) = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$.

1. Démontrer que $\sigma(n) \longrightarrow +\infty$.
2. Soient $p \in \mathscr{P}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$. Démontrer :
   $$\mathrm{Div}\left(p^\alpha\right) = \left\{ p^k \ : \ k \in [\![0, \alpha]\!] \right\}$$
   et en déduire une expression de $\sigma\left(p^\alpha\right)$ sans symbole sommatoire.
3. Soient a et b deux entiers naturels non nuls premiers entre eux. Démontrer que l'application :
   $$f \left| \begin{array}{ccc} \mathrm{Div}(a) \times \mathrm{Div}(b) & \longrightarrow & \mathrm{Div}(ab) \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 d_2 \end{array} \right.$$
   est bien définie et bijective, puis que $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$.
4. Soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrer que :
   $$\sigma(n) = \prod_{p \in \mathscr{P} \cap \mathrm{Div}(n)} \frac{p^{v_p(n)+1} - 1}{p - 1}.$$

★ **TD12.16. Exercice (Formule de Legendre)**

1. Soit un entier $n \geqslant 2$. Démontrer que :
   $$v_p(n!) = \lim_{K \to +\infty} \sum_{k=1}^{K} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$
2. Quel est le nombre de zéros à la fin de l'écriture en base 10 de la factorielle de 2 023 ?