Feuille d'exercices n°11

Nombres réels et suites numériques

TD11.1. Exercice (Un critère de nullité pour un réel) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, $x \leqslant \varepsilon$. Démontrer que x est nul.

TD11.2. Exercice (Carrés des distances à l'origine des points de l'hyperbole)
Soient $\mathscr{H} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ xy = 1\right\}$ et $A := \left\{x^2 + y^2 \ : \ (x, y) \in \mathscr{H}\right\}$.

1. La partie A est-elle majorée ? Si oui, calculer sa borne supérieure.
2. La partie A est-elle minorée ? Si oui, calculer sa borne inférieure.

TD11.3. Exercice (Des bornes supérieure et inférieures des termes d'une suite homographique)
Soient a, b deux réels strictement positifs et $A := \left\{a + \dfrac{b}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. La partie A est-elle majorée ? Si oui, calculer sa borne supérieure.
2. La partie A est-elle minorée ? Si oui, calculer sa borne inférieure.

TD11.4. Exercice (De la borne supérieure d'une réunion de parties de $\mathbb{R}$) Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. Démontrer que $\sup(A \cup B) = \max\left\{\sup(A), \sup(B)\right\}$ en justifiant l'existence des trois bornes supérieures en cours d'étude.

★ **TD11.5. Exercice (Un théorème de point fixe)** Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une application croissante.

1. Démontrer que $A := \left\{x \in [0,1] \ : \ f(x) \geqslant x\right\}$ admet une borne supérieure et que $\alpha := \sup(A) \in [0,1]$.
2. Démontrer que $f(\alpha) = \alpha$. On pourra scinder l'étude en deux parties : $\alpha = 1$ et $\alpha < 1$.

TD11.6. Exercice (Du diamètre d'une partie bornée de $\mathbb{R}$) Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Démontrer que $E := \left\{\left|x - y\right| \ : \ (x, y) \in A^2\right\}$ possède un sup et le calculer.

★ **TD11.7. Exercice (De la borne supérieure de l'image d'une partie par une bijection croissante)**
Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application strictement croissante et surjective, A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Démontrer que $f(A)$ admet une borne supérieure et la déterminer.

TD11.8. Exercice (Densité de l'ensemble des cubes de rationnels)
Démontrer que $A := \left\{r^3 \ : \ r \in \mathbb{Q}\right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

TD11.9. Exercice (Sommes des chiffres d'un entier en base 10) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons s_n la somme des chiffres de l'écriture décimale de n.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n \leqslant 9\left(\log_{10}(n) + 1\right)$.
2. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{s_{n+1}}{s_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée. Atteint-elle ses bornes ?
3. Généraliser le résultat de Q2 de la base 10 à une base $b \geqslant 2$ quelconque.

TD11.10. Exercice (Comportement asymptotique de suites) Étudier le comportement asymptotique des suites ci-dessous.

(a) $\left(\sqrt[n]{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (b) $\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (c) $\left(\sqrt{n^4+n^2+1}-n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(d) $(\ln(n)+\sin(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ (e) $\left(n\sin\left(n^2\right)+2n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (f) $\left(\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

(g) $\left(\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (h) $\left(n\left|\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (j) $\left(\sin\left(n\pi-\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$

TD11.11. Exercice (Suite de produits) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n=\frac{1}{n}\prod_{k=1}^{n}(k+n)^{1/n}$.

TD11.12. Exercice (Suite d'entiers qui converge) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ On suppose que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in\mathbb{Z}$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

★ **TD11.13. Exercice (Extraction d'une suite divergeant vers $+\infty$)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite non majorée. Démontrer que l'on peut extraire de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui diverge vers $+\infty$.

★ **TD11.14. Exercice (Suite réelle bornée possédant une unique valeur d'adhérence)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On suppose que toutes les suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent ont même limite. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

TD11.15. Exercice (Suites extraites des termes d'indices pairs, impairs et multiples de 3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que les trois suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

★ **TD11.16. Exercice (Règle de Cauchy)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose qu'il existe $\ell\in\mathbb{R}_+$ tel que $\sqrt[n]{u_n}\longrightarrow\ell$.

1. Démontrer que, si $\ell<1$, alors $u_n\longrightarrow 0$.
2. Démontrer que, si $\ell>1$, alors $u_n\longrightarrow+\infty$.
3. Que peut-on dire si $\ell=1$?

TD11.17. Exercice (Suite arithmético-géométrique) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=2$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=3u_n+2$, valable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

TD11.18. Exercice (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=1$, $u_1=2$, et relation de récurrence $u_{n+2}=3u_{n+1}-2u_n$, valable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

TD11.19. Exercice (Suite récurrente linéaire d'ordre 2) Déterminer l'expression du terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et la relation de récurrence $u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$, valable pour tout $n\in\mathbb{N}$.

TD11.20. Exercice (Suite récurrente linéaire d'ordre 2 cachée) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_0\in\mathbb{R}_{>0}$, $u_1\in\mathbb{R}_{>0}$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}=\sqrt{u_nu_{n+1}}$.

1. Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite éventuelle de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de u_0 et u_1.

TD11.21. Exercice (Suite récurrente homographique) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{3-u_n}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.
2. Étudier le comportement asymptotique de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

TD11.22. Exercice (Deux études de suites récurrentes)

1. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n^2}{2}$.
2. Étudier la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3 - \sqrt{\dfrac{v_n}{2}}$.

TD11.23. Exercice (Suite récurrente) Considérons la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k}$. Déterminer une relation entre u_{n+1} et u_n et étudier la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

TD11.24. Exercice (Deux suites récurrentes croisées) Considérons deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $0 \leqslant x_0 \leqslant 7$, $0 \leqslant y_0 \leqslant 7$ et les relations de récurrence $x_{n+1} = \sqrt{7-y_n}$ et $y_{n+1} = \sqrt{7-x_n}$ valable pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

TD11.25. Exercice (Moyenne et moyenne des inverses) Soient u_0 et v_0 des nombres réels strictement positifs. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u_n} + \dfrac{1}{v_n}\right)$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n+v_n}{2}$.

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n := u_n v_n$, et en déduire la limite commune des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

TD11.26. Exercice (Suite récurrente et application contractante) Soient a, b des réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que

- il existe $k \in [0,1[$ telle que pour tout $x \in [a,b]$, $\left|f'(x)\right| \leqslant k$;
- pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$. $\quad$ [l'intervalle $[a,b]$ est stable par f]

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que l'application f est k-lipschitzienne, i.e. :
$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant k\left|x-y\right|.$$
2. Démontrer que f possède un unique point fixe, i.e. qu'il existe un unique $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - c| \leqslant k^n\,|x_0 - c|$.
4. En déduire que $x_n \longrightarrow c$.

TD11.27. Exercice (Suite récurrente et application 1-lipschitzienne) Soient a, b des réels tels que $a < b$. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ telle que

- pour tout $x \in [a,b]$, $\left|f'(x)\right| \leqslant 1$;
- pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$. $\big[$l'intervalle $[a,b]$ est stable par $f\big]$

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par la donnée de $x_0 \in [a,b]$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + f(x_n))$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Démontrer que l'application f est 1-lipschitzienne, i.e. :
$$\forall\,(x,y) \in [a,b] \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leqslant |x-y|\ .$$
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - x_n$ a le même signe que $x_n - x_{n-1}$.
3. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un point fixe de f, i.e. que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $f(\lim u_n) = \lim u_n$.

TD11.28. Exercice (le nombre e est irrationnel) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.

1. Démontrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. On admet que $u_n \longrightarrow e$. Démontrer que $e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. *Indication. On pourra raisonner par l'absurde et supposer que e peut s'écrire* $\dfrac{p}{q}$ *avec* $p \in \mathbb{N}$ *et* $q \in \mathbb{N}^*$.

TD11.29. Exercice (Critère spécial des séries alternées) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs, convergeant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $s_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, u_k$.

1. Étudier les suites $(s_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Conclure quant à la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Quel est la nature de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $w_n := 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{6} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$?

TD11.30. Exercice (Somme des inverse des coefficients binomiaux) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Notations de Landau pour les suites

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels non nuls.

(1) On dit que u_n et v_n sont équivalents et on note $u_n \sim v_n$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 1$.

(2) On dit que u_n est un « petit o » de v_n et on note $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ si $\dfrac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0$.

(3) On dit que u_n est un « grand O » de v_n et on note $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Les notations de Landau $\sim$, o et O possèdent des propriétés agréables, cf. trois exercices suivants. Cependant, <u>on ne peut pas additionner les équivalents.</u> En effet :

$$n^2+2n \sim n^2+n \text{ et } -n^2 \sim -n^2 \text{ mais } 2n \not\sim n$$

TD11.31. Exercice (La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $(\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}}$) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels non nuls.

- *Réflexivité* Démontrer que $u_n \sim u_n$.
- *Symétrie* Démontrer que, si $u_n \sim v_n$, alors $v_n \sim u_n$.
- *Transitivité* Démontrer que, si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

TD11.32. Exercice (Produits et quotients d'équivalents) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites de réels non nuls telles que $a_n \sim b_n$ et $c_n \sim d_n$.

1. Démontrer $a_n c_n \sim b_n d_n$.
2. Démontrer $\dfrac{a_n}{c_n} \sim \dfrac{b_n}{d_n}$.

TD11.33. Exercice (Quelques propriétés des « petits o » et des « grands O ») Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels non nuls. Démontrer les assertions suivantes.

1. Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$. [Transitivité des « petits o »]
2. Si $u_n = \mathrm{o}(u_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
3. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{o}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{o}(w_n)$.
4. Si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et $v_n = \mathrm{O}(w_n)$ alors $u_n = \mathrm{O}(w_n)$. [Transitivité des « grands O »]

TD11.34. Exercice (Échelles de comparaison pour les suites) Soient $\alpha > 0, \beta > 0$ et $q > 1$.

1. Justifier $\ln^{\alpha}(n) = \mathrm{o}\left(n^{\beta}\right)$.
2. Justifier $n^{\alpha} = \mathrm{o}\left(q^n\right)$.
3. Démontrer $q^n = \mathrm{o}(n!)$.

TD11.35. Exercice (Équivalents de suites) Donner un équivalent « simple » de u_n dans chacun des cas ci-dessous.

(a) $u_n = \dfrac{2^n + n^9}{3^n - n^{2023}}$ (b) $u_n = \dfrac{2022^n + n!}{n! + 2023^n}$ (c) $u_n = \left(1 - \cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \operatorname{cotan}\left(\dfrac{1}{n^{5/2}} \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right)\right)$

TD11.36. Exercice (Équivalents et encadrement) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites de réels non nuls. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On suppose que $u_n \sim a_n$, $w_n \sim a_n$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Démontrer que $v_n \sim a_n$.

TD11.37. Exercice (Équivalents et signes) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels non nuls telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que u_n et v_n ont même signe à partir d'un certain rang.

TD11.38. Exercice (Questions ouvertes sur les équivalents) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites de réels non nuls.

★ **TD11.39. Exercice (Somme de deux termes consécutifs et équivalents)** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels telle que $u_n + u_{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$.

1. Démontrer que $u_n \longrightarrow 0$.
2. puis déterminer un équivalent de u_n.

TD11.40. Exercice (Équivalents et sommes de Riemann) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Démontrer que $u_n \sim \dfrac{2n}{\pi}$.

TD11.41. Exercice (Suite implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que la fonction :
$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^5 + nx - 1 \end{array} \right.$$
s'annule une unique fois sur $\mathbb{R}$, en un point noté u_n.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$.
3. Démontrer que $u_n \longrightarrow 0$.
4. Donner un équivalent « simple » a_n de u_n.
5. Donner un équivalent « simple » $a_n - u_n$.

TD11.42. Exercice (Suite implicite)

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, l'équation $1 + \ln(x+n) = x$ admet une unique solution $u_n \in \mathbb{R}_{>0}$.
2. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante.
3. Démontrer qu'à partir d'un certain rang, $\ln(n) \leqslant u_n \leqslant n$.
4. Déterminer un équivalent de u_n.

TD11.43. Exercice (Suite implicite)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution α_n dans $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Donner un équivalent « simple » β_n de α_n.
3. Exprimer $\gamma_n := \alpha_n - \beta_n$ en fonction de Arctan et α_n, puis démontrer que $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite ℓ, qu'on déterminera.
4. Donner un équivalent « simple » γ_n.

TD11.44. Exercice (Équivalents de suites) Donner un équivalent « simple » de u_n dans chacun des cas ci-dessous.

(a) $u_n = \mathrm{ch}(n)$ (b) $u_n = 1 - \mathrm{th}(n)$

(c) $u_n = \dfrac{n \ln(\mathrm{ch}(n) - 1)}{n^2 + 1}$ (d) $u_n = \dfrac{\ln\left(1 + \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{n} - 3}{2n^4 - 1}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) \mathrm{Arctan}\left(\frac{n^3 + 2}{3n + 1}\right)}$

TD11.45. Exercice (« Petits o » et des « grands O ») Démontrer les assertions suivantes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2(31k + 5) = \mathrm{O}(n)$ (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^3 = \mathrm{O}\left(n^4\right)$ (c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} e^{-k} = \mathrm{o}\left(e^{-n}\right)$

TD11.46. Exercice (Suite récurrente) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

1. Démontrer que $u_n \longrightarrow +\infty$.
2. Étudier le comportement asymptotique de la suite $\left(v_n := u_{n+1}^3 - u_n^3\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire un équivalent « simple » u_n.