FEUILLE D'EXERCICES N°10

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

TD10.1. EXERCICE (INDÉPENDANCE LINÉAIRE) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des nombres complexes deux-à-deux distincts et les fonctions :

$$f_1 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda_1 x} \end{array} \right. \qquad f_2 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda_2 x} \end{array} \right. \qquad f_3 \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & e^{\lambda_3 x} \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que les fonctions f_1, f_2 sont linéairement indépendantes.
2. Démontrer que les fonctions f_1, f_2, f_3 sont linéairement indépendantes.

TD10.2. EXERCICE (EDL1) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 2\cos(2x) + \sin(2x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

TD10.3. EXERCICE (EDL1) Résoudre l'équation différentielle $y' - 2y = x^3$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

TD10.4. EXERCICE (EDL1) Résoudre l'équation différentielle $\left(1 + x^2\right) y' + x\,y = 2x^2 + 1$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

TD10.5. EXERCICE (EDL1 AVEC RACCORDEMENT) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x\,y' - y = x^3 .$$

1. Résoudre (E) sur un intervalle I ne contenant pas 0.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

TD10.6. EXERCICE (EDL1 AVEC RACCORDEMENT) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x\,y' + 2\,y = \frac{x}{1 + x^2} .$$

1. Résoudre (E) sur un intervalle I ne contenant pas 0.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

TD10.7. EXERCICE (EDL1 AVEC RACCORDEMENT) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad |x|\,y' + y = x^2 .$$

1. Résoudre (E) sur un intervalle I ne contenant pas 0.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

TD10.8. EXERCICE (EDL1 AVEC RACCORDEMENT) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \left(x^2 - 1\right) y' + x\,y = x^3 - x .$$

1. Résoudre (E) sur un intervalle I ne contenant ni -1 ni 1.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

TD10.9. Exercice (EDL1 avec raccordement) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x\,(x-1)\,y' + y = x\,.$$

1. Résoudre (E) sur un intervalle I ne contenant ni 0 ni 1.
2. Résoudre (E) sur l'intervalle $\mathbb{R}$.

TD10.10. Exercice (système différentiel) Déterminer les fonctions $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifiant le système différentiel ci-dessous.

$$\begin{cases} x' &= x + y \\ y' &= x + y \end{cases}$$

TD10.11. Exercice (équation fonctionnelle) On se propose de déterminer les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que :

(1) f est dérivable en 0 ;
(2) pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = f(x)f(y)$.

1. Donner deux fonctions $f_1 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $f_2 \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions (1) et (2)
2. Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions (1) et (2).
   (a) Démontrer que $f(0) \in \{0,1\}$.
   (b) Que dire de f si $f(0) = 0$?
   (c) Démontrer que, si $f(0) = 1$, alors f est dérivable en tout point x de $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = f'(0)\,f(x)$.
3. Déterminer toutes les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant les conditions (1) et (2).

TD10.12. Exercice (EDLCC2) Résoudre l'équation différentielle $2\,y''+2\,y'+y = x$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

TD10.13. Exercice (EDLCC2) Résoudre l'équation différentielle $y''+4\,y'-5\,y = e^x$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

TD10.14. Exercice (EDLCC2) Résoudre l'équation différentielle $y''+2\,y'+y = 4\,e^{-x}$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

TD10.15. Exercice (EDLCC2) Résoudre l'équation différentielle $y''+y = \cos^2(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

TD10.16. Exercice (EDLCC2) Résoudre l'équation différentielle $y''-y = \mathrm{ch}(x)$ d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

TD10.17. Exercice (géométrie d'une EDLCC2) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ et l'EDLCC2 :

$$y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(I,\mathbb{R})$. Soient y_1, y_2 deux solutions de (E) et $\mathscr{C}_{y_1}, \mathscr{C}_{y_2}$ leurs courbes respectives dans le plan muni d'un repère.

1. On suppose que $\mathscr{C}_{y_1}$ et $\mathscr{C}_{y_2}$ se rencontrent en un point $A(x_0,y_0)$, où $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$, et que leurs tangentes en A sont confondues. Démontrer que $\mathscr{C}_{y_1} = \mathscr{C}_{y_2}$.
2. Considérons un point de $A(x_0,y_0) \in \mathscr{C}_{y_1}$, où $(x_0,y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Démontrer qu'il existe une infinité de solutions y de (E) telles que $\mathscr{C}_y$ coupe $\mathscr{C}_{y_1}$ au point A.

TD10.18. Exercice (système différentiel) On considère le système différentiel :

$$(SH) \qquad \begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= x + 2y \end{cases}$$

d'inconnues $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

1. Soit $(x, y) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ une solution de (SH).
   (a) Justifier que x et y sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que x et y sont solution de l'EDLCCH2 :

   $$(E) \qquad z'' + a\,z' + b\,z = 0$$

   d'inconnue $z \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Résoudre le système différentiel (SH).
3. Déterminer fonctions x, y solutions de (SH) vérifiant $x(0) = 1$ et $y(0) = 0$.
4. Résoudre le système différentiel :

   $$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{ccccccc} x' & = & 2x & + & y & + & 1 \\ y' & = & x & + & 2y & - & 1 \end{array} \right.$$

   d'inconnues $x \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

TD10.19. Exercice (Équation fonctionnelle) Déterminer les fonctions $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que :

(1) f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$;
(2) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$.

TD10.20. Exercice (Équation différentielle non linéaire) On considère l'équation différentielle :

$$x\,x' = \frac{1}{t}$$

d'inconnue $x \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{R})$, avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.

1. Résoudre l'équation (E) sur $I =]0, +\infty[$.
2. Résoudre l'équation (E) sur $I = [1, +\infty[$.

TD10.21. Exercice (Équation de Bernoulli)

1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle :

   $$(E) \qquad y' + 2\,y - (x+1)\sqrt{y} = 0$$

   d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I,]0, +\infty[)$.
   (a) Soit $y \in \mathscr{C}^1(I,]0, +\infty[)$ une solution de (E). Déterminer une EDL1 $\left(E'\right)$ dont la fonction :

   $$z \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{y(x)} \end{array} \right.$$

   est solution, puis résoudre $\left(E'\right)$ sur $\mathbb{R}$.
   (b) En déduire l'ensemble solution de (E).
2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, $(a, b) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})^2$ et l'équation différentielle :

   $$(E_r) \qquad y' + a(x)\,y = b(x)\,y^r$$

   d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(I,]0, +\infty[)$. Proposer une méthode permettant de résoudre l'équation (E_r), en s'inspirant de la démarche adoptée en 1.

TD10.22. EXERCICE (ÉQUATION D'EULER) On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x^2\, y'' + 2x\, y' - 6\, y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$.

1. Soit $y \in \mathscr{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ une solution de (E). Déterminer une EDLCCH2 (E') dont la fonction :

$$z \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y\left(e^t\right) \end{array} \right.$$

   est solution, puis résoudre (E') sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire l'ensemble solution de (E).

TD10.23. EXERCICE (ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE EDLH1) Démontrer que toute fonction $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ solution de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' + e^{x^2}\, y = 0$$

possède une limite nulle en $+\infty$.

TD10.24. EXERCICE (ÉTUDE QUALITATIVE D'UNE EDL1) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. On suppose que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

1. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) > 0$.
2. Déterminer les solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad \frac{y'}{f'(x)} - y = f(x)$$

   d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$, qui tendent vers $-\infty$ en $+\infty$.

TD10.25. EXERCICE (EDL1 ET PÉRIODICITÉ) Soient $a \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $b \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ deux fonctions périodiques de période 1 et l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y' = a(x)\, y + b(x)$$

d'inconnue $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Déterminer une CNS pour que l'équation (E) possède nue solution 1-périodique.