FEUILLE D'EXERCICES N°9

CALCUL DE PRIMITIVES

TD9.1. EXERCICE Calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{1/e}^{1/e^3} \frac{1}{t\ln(t)}\,\mathrm{d}t$.

TD9.2. EXERCICE Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{2t\ln(t)+t}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $x=\ln(t)$.

TD9.3. EXERCICE Calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+2e^{-x}}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'un changement de variable.

TD9.4. EXERCICE Calculer les deux intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

TD9.5. EXERCICE Calculer les intégrales $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{Arctan}^2(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\ln(x)}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$.

TD9.6. EXERCICE Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^\pi x^2\,e^x\cos(x)\,\mathrm{d}x$.

TD9.7. EXERCICE Déterminer une primitive des fonctions :

$$f_1\colon x\longmapsto \sin^5(x) \qquad f_2\colon x\longmapsto \cos^4(x)\sin^5(x) \qquad f_3\colon x\longmapsto \cos(3x)\cos^3(x)$$

sur $\mathbb{R}$.

TD9.8. EXERCICE Déterminer une primitive des fonctions :

$$f_1\colon x\longmapsto \frac{1}{x^2+4} \qquad f_2\colon x\longmapsto \frac{1}{x^2+4x+5} \qquad f_3\colon x\longmapsto \frac{1}{1-x^2}$$

sur des intervalles que l'on précisera.

TD9.9. EXERCICE Calculer une primitive de la fonction $f\colon x\longmapsto \mathrm{Arcsin}^2(x)$ sur $]-1,1[$.

TD9.10. EXERCICE Calculer une primitive de la fonction $f\colon x\longmapsto \dfrac{x^7}{\left(1+x^4\right)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

TD9.11. EXERCICE Calculer une primitive de la fonction $f\colon x\longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\sqrt[3]{x}\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à l'aide du théorème fondamental de l'analyse et du changement de variable $t=\sqrt[3]{x}$.

TD9.12. Exercice Calculer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1+\tan(x)}{1+\sin(2x)}$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ à l'aide du théorème fondamental de l'analyse et du changement de variable $u = \tan(x)$.

TD9.13. Exercice Calculer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{1}{1+\mathrm{ch}(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

TD9.14. Exercice Calculer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x+4}$ sur $]-4, +\infty[$.

TD9.15. Exercice Calculer une primitive des fonctions :

$$f_1\colon x \longmapsto \frac{1}{1-\sqrt{x+2}} \qquad f_2\colon x \longmapsto \frac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} \qquad f_3\colon x \longmapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

sur des intervalles que l'on précisera.

TD9.16. Exercice Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une primitive de $f_n\colon x \longmapsto \ln^n(x)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$.

TD9.17. Exercice Calculer, pour tout $(\alpha, \beta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $I_n(\alpha,\beta) := \displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^n (x-\beta)^n \,\mathrm{d}x$.

TD9.18. Exercice Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\,\mathrm{d}x$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n, puis calculer I_3.

TD9.19. Exercice Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b], \mathbb{R})$.

1. On suppose que f est paire. Démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On suppose que f est impaire. Démontrer que $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

TD9.20. Exercice Soient $T \in \mathbb{R}_{>0}$ et $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T-périodique. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$.

TD9.21. Exercice Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $A \in [1, +\infty[$, on pose $I(A) := \displaystyle\int_1^A \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$. Étudier la limite éventuelle de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

TD9.22. Exercice Soit $\beta \in \mathbb{R}$. Pour tout $A \in [2, +\infty[$, on pose $I(A) := \displaystyle\int_2^A \frac{1}{x\ln^\beta(x)}\,\mathrm{d}x$. Étudier la limite éventuelle de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.

TD9.23. Exercice

1. Déterminer les racines complexes de X^4+1 et en déduire deux polynômes P_1 et P_2 de degré 2, à coefficients réels tels que $X^4+1 = P_1P_2$.
2. Déterminer $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{x^4+1} = \dfrac{ax+b}{P_1(x)} + \dfrac{cx+d}{P_2(x)}$.
3. Calculer, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, $I(A) := \displaystyle\int_0^A \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.
4. Étudier la limite éventuelle de $I(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$.