FEUILLE D'EXERCICES N°8

FONCTIONS RÉELLES À VALEURS DANS $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$

TD8.1. EXERCICE Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire. Démontrer que $f(A)$ est une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0.

TD8.2. EXERCICE Soient A, B deux parties de $\mathbb{R}$ et $f\colon A \longrightarrow B$ une fonction surjective et strictement croissante sur A.

1. Démontrer que f est bijective.
2. Démontrer que la fonction f^{-1} est strictement croissante sur B.

TD8.3. EXERCICE Déterminer le domaine de dérivabilité et calculer la dérivée de $f\colon x \longmapsto \left(1+x^2\right)^{\ln(x)}$.

TD8.4. EXERCICE Résoudre le système :

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{ccccc} \mathrm{ch}(x) & + & \mathrm{ch}(y) & = & \dfrac{35}{12} \\[2ex] \mathrm{sh}(x) & + & \mathrm{sh}(y) & = & \dfrac{25}{12} \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

TD8.5. EXERCICE Résoudre l'équation $e^{4x} - 12e^{2x} + 35 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD8.6. EXERCICE Soit $y \in \mathbb{R}$ fixé. Étudier l'équation $\mathrm{sh}(x) = y$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD8.7. EXERCICE Résoudre l'équation $2^x = x^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_{>0}$.

TD8.8. EXERCICE Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\mathrm{th}(x) = \dfrac{2}{\mathrm{th}(2x)} - \dfrac{1}{\mathrm{th}(x)}$ et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \,\mathrm{th}\left(2^k x\right)$.

TD8.9. EXERCICE Calculer, pour tout $(x, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{ch}^2(kx)$.

TD8.10. EXERCICE Soient $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_{>0})^3$ et $d \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$\mathrm{Arctan}(ax+d) + \mathrm{Arctan}(bx) + \mathrm{Arctan}(cx-d) = 0$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD8.11. EXERCICE Démontrer que, pour tout $t \in [-1, 1]$, $2\,\mathrm{Arccos}\left(\sqrt{\dfrac{1+t}{2}}\right) = \mathrm{Arccos}(t)$.

TD8.12. EXERCICE Résoudre l'équation $\mathrm{Arcsin}(2x) + \mathrm{Arcsin}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

TD8.13. EXERCICE Résoudre l'équation $\mathrm{Arcsin}(2x) - \mathrm{Arcsin}(\sqrt{3}\,x) = \mathrm{Arcsin}(x)$.

TD8.14. Exercice Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on introduit la fonction $f_{a,b}\colon x\longmapsto \operatorname{Arctan}(ax+b)$.

1. Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.
2. En déduire une primitive de la fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$ sur $\mathbb{R}$ puis la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$.

TD8.15. Exercice Soit la fonction $f\colon x\longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et ses limites éventuelles aux bornes.
2. Simplifier l'expression de f.

TD8.16. Exercice

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de la fonction $f\colon x\longmapsto 2\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)+\operatorname{Arcsin}(2x-1)$.
2. Simplifier $f(x)$ pour tout $x\in\mathscr{D}$.

TD8.17. Exercice Démontrer que $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

TD8.18. Exercice Soit f la fonction définie par $f\colon x\longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Préciser le domaine de dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

TD8.19. Exercice Soit f la fonction définie par $f\colon x\longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Préciser le domaine de dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.
3. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

TD8.20. Exercice Soit f la fonction définie par $f\colon x\longmapsto x\,\operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Étudier la parité de la fonction f.
3. Préciser le domaine de dérivabilité de f et donner l'expression de sa dérivée.
4. Justifier que, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $\operatorname{th}(x)\leqslant x$.
5. Dresser le tableau de variations de f en précisant les limites éventuelles aux bornes de l'ensemble de définition.
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.