FEUILLE D'EXERCICES N°7

INÉGALITÉS

TD7.1. EXERCICE Résoudre l'équation $x\,|x| = 3x+2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD7.2. EXERCICE Résoudre l'équation $x+|x| = \dfrac{2}{x}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^*$.

TD7.3. EXERCICE Résoudre l'inéquation $x^3+x^2-5x-5 \leqslant 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD7.4. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\dfrac{1+x}{1-x} < |x-1|$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

TD7.5. EXERCICE Soit l'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{|x|}{1+|x|} \end{array} \right. .$$

Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$.

TD7.6. EXERCICE

1. Donner un encadrement optimal de $x(1-x)$ pour $x \in [0,1]$.
2. En déduire que, pour tout $(a,b,c) \in [0,1]^3$, $\min(a(1-b), b(1-c), c(1-a)) \leqslant \dfrac{1}{4}$.

TD7.7. EXERCICE

1. Démontrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x+y)^2 \geqslant 4xy$.
2. En déduire que, pour tout $(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^3$, $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

TD7.8. EXERCICE Démontrer que, pour tout $(a,b) \in (\mathbb{R}_{>0})^2$, $\dfrac{2ab}{a+b} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$.

TD7.9. EXERCICE Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!} < 3$.

TD7.10. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $(n!)^2 = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$ et en déduire que $\sqrt{n} \leqslant \sqrt[n]{n!}$.

TD7.11. EXERCICE Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer $\min\{a,b\}$ et $\max\{a,b\}$ comme une combinaison linéaire de $a+b$ et $|a-b|$.

TD7.12. EXERCICE Démontrer que, pour tout $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, $|\max\{a,b\} - \max\{c,d\}| \leqslant \max\{|a-c|, |b-d|\}$.

TD7.13. EXERCICE Soit $A := \left\{ \dfrac{2n-1}{3n+1} \;:\; n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$.

1. Démontrer que A est borné.
2. Démontrer que A possède un minimum et le préciser.
3. Démontrer que A ne possède pas de maximum.

TD7.14. Exercice Soient $\mathscr{H} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,:\, xy=1\}$ et $A := \{x^2+y^2 \,:\, (x,y)\in\mathscr{H}\}\subset\mathbb{R}$.

1. Démontrer que A possède un minimum et le déterminer.
2. Démontrer que A n'est pas majorée.

TD7.15. Exercice Soit n un entier naturel non nul, dont l'écriture décimale est :

$$n = a_0 + a_1 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_p 10^p$$

où $p\in\mathbb{N}$, $(a_0,a_1,\ldots,a_p)\in[\![0,9]\!]^{p+1}$ et $a_p\neq 0$. Exprimer p en fonction de n.

TD7.16. Exercice Calculer, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$.

TD7.17. Exercice Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

TD7.18. Exercice Démontrer que, pour tout $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \frac{1}{n}\lfloor nx\rfloor\right\rfloor = \lfloor x\rfloor$.

TD7.19. Exercice Démontrer que, pour tout $(x,n)\in\mathbb{R}\times\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor = \lfloor nx\rfloor$.

TD7.20. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2}\left\lfloor\sqrt{k}\right\rfloor$.

TD7.21. Exercice Soit $x\in\mathbb{R}$. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\lfloor kx\rfloor}{n^2}$.

1. Donner, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, un encadrement de $n^2\,u_n$.
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

TD7.22. Exercice Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $\left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$ est un entier pair.
2. En déduire la partie entière de $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$ est un entier impair.

TD7.23. Exercice Résoudre l'équation $\left\lfloor x^2 - x\lfloor x\rfloor\right\rfloor = 1$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$.

TD7.24. Exercice (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

1. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad \forall\,(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n \quad \forall\,(b_1,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n \qquad \left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}\,.$$

   en raisonnant par récurrence sur $n\in\mathbb{N}^*$.
2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$. Démontrer que, pour tout $(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^n |a_k| \leqslant \sqrt{n}\,\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}\,.$$

   Ces inégalités sont-elles optimales ?