FEUILLE D'EXERCICES N°5

SOMMES ET PRODUITS

TD5.1. EXERCICE Soit $(a,b,n,m) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant m$. Calculer $\sum_{k=n}^{m} (ak+b)$.

TD5.2. EXERCICE Soit $(q,n,m) \in \times\mathbb{C} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $n \leqslant m$. Calculer $\sum_{k=n}^{m} q^k$.

TD5.3. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{3n} \max\{k,n\}^2$.

TD5.4. EXERCICE Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n}^{n} ij$.

TD5.5. EXERCICE Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \frac{k}{\ell}$.

TD5.6. EXERCICE Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}$.

TD5.7. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ puis $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$.

TD5.8. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

TD5.9. EXERCICE On pose, pour tout $(p,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, $S_p(n) := \sum_{k=1}^{n} k^p$.

1. Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$. En considérant la somme $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+2} - k^{p+2}$, démontrer :
$$S_{p+1}(n) = \frac{1}{p+2}\left((n+1)^{p+2} - 1 - \sum_{\ell=0}^{p} \binom{p+2}{\ell} S_\ell(n)\right).$$
2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_3(n)$ et $S_4(n)$.
3. Démontrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'application $n \longmapsto S_p(n)$ est polynomiale de degré $p+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{p+1}$.

TD5.10. EXERCICE

1. Démontrer que, pour tout $(k,p,n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$, $\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{n}{p}$.
2. Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$. Calculer $\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

TD5.11. Exercice (formule de Vandermonde)

1. Démontrer que, pour tout $(n,m,r)\in\mathbb{N}^3$ tel que $r \leqslant n+m$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{r}\binom{n}{k}\binom{m}{r-k}=\binom{n+m}{r}$.
2. En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

TD5.12. Exercice

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle A(n):=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}$ et $\displaystyle B(n):=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}$.
2. En déduire les valeurs de $\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\binom{2n}{2p}$ et $\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1}\binom{2n}{2p+1}$.

TD5.13. Exercice

Soit $x\in\mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(kx)$.

TD5.14. Exercice

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(a+kb)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb)$.

TD5.15. Exercice (inégalité arithmético-géométrique)

1. Démontrer, que pour tout $x\in\mathbb{R}_{>0}$, $\ln(x)\leqslant x-1$.
2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels strictement positifs. On note $\displaystyle m:=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ la moyenne arithmétique de $x_1,\dots,x_n$. En considérant la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m}-1\right)$ établir $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}x_k}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$.

TD5.16. Exercice

Calculer une primitive de la fonction $x\longmapsto\sin^4(x)$.

TD5.17. Exercice

Calculer une primitive de la fonction $x\longmapsto\cos^8(x)$.

TD5.18. Exercice

Donner un polynôme de degré 3 à coefficients entiers dont $\cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$ est racine.

TD5.19. Exercice

Donner un polynôme de degré 7 à coefficients entiers dont $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ est racine.

TD5.20. Exercice (formule du multinôme)

Soit $(k,p)\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}\times\mathbb{N}$. On pose :

$$E_{k,p}:=\left\{(n_1,\dots,n_k)\in\mathbb{N}^k\ :\ n_1+\ldots+n_k=p\right\}.$$

Démontrer que, pour tout $(z_1,\dots,z_k)\in\mathbb{C}^k$:

$$(z_1+\ldots+z_k)^p=\sum_{(n_1,\dots,n_k)\in E_{k,p}}\frac{p!}{n_1!\ldots n_k!}\,z_1^{n_1}\ldots z_k^{n_k}.$$

TD5.21. Exercice (équivalent des sommes partielles de la série harmonique)

1. Démontrer que, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{k+1}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{k}$ et illustrer géométriquement cette double inégalité.
2. En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, un encadrement de $\displaystyle H_n:=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, puis $\displaystyle\frac{H_n}{\ln(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.