Feuille d'exercices n°4

Ensembles et applications

TD4.1. Exercice Démontrer que les ensembles $A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x+2y=3\right\}$ et $B := \{(1-2t, 1+t) \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ sont égaux.

TD4.2. Exercice Soit E un ensemble. Pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, on pose $A \Delta B := \{x \in E \,:\, x \notin A \cap B\}$ (différence symétrique de A et B).

1. Calculer, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\overline{A}$.
2. Démontrer que, pour tout $(A,B,C) \in \mathscr{P}(E)^3$, $(A\Delta B)\cap C = (A\cap C)\Delta(B\cap C)$.
3. Démontrer que, pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $A\Delta B = B$ si et seulement si $A = \emptyset$.

TD4.3. Exercice Soient les applications f et g définies par :

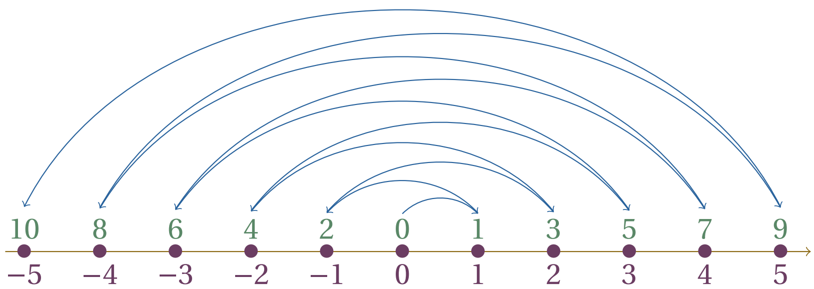
$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ y & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } y=0 \\ y-1 & \text{si } y \geqslant 1\,. \end{cases} \end{array} \right.$$

1. Étudier l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité éventuelle de f et g.
2. Déterminer $f\circ g$ et $g \circ f$.

TD4.4. Exercice Démontrer que l'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} -\dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair} \\[2ex] \dfrac{n+1}{2} & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

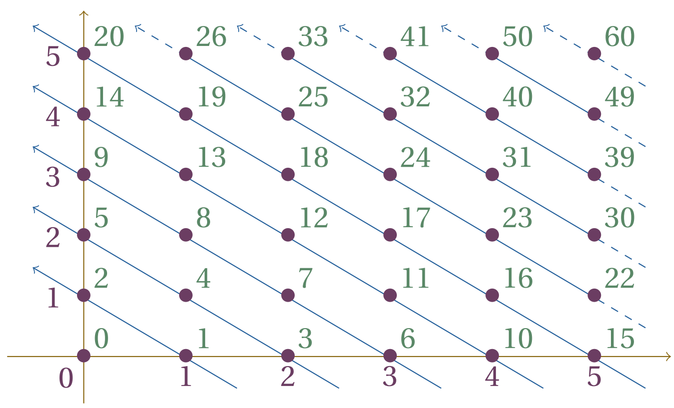
est bijective.
Ci contre, nous écrivons au-dessus de chaque élément de $\mathbb{Z}$ son unique antécédent dans $\mathbb{N}$ par f.



TD4.5. Exercice Démontrer que l'application f définie par :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (a,b) & \longmapsto & b + \displaystyle\sum_{k=0}^{a+b} k = b + \frac{(a+b)(a+b+1)}{2} \end{array} \right.$$

est bijective.
Ci-contre, on place la valeur de l'image $f(a,b)$ du couple $(a,b) \in [\![0,5]\!]^2$ à côté du point de coordonnées (a,b).



TD4.6. Exercice Soit l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array} \right. .$$

1. L'application f est-elle injective ? surjective ?
2. Démontrer $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Démontrer que l'application $g := f_{|[-1,1]}^{|[-1,1]}$ est bijective et calculer g^{-1}.

TD4.7. Exercice Pour tout $m \in \mathbb{R}$, notons f_m l'application :

$$f_m \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x-y, x+my) \end{array} \right. .$$

Donner une CNS sur $m \in \mathbb{R}$ pour que l'application f_m soit bijective.

TD4.8. Exercice Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Démontrer que f est injective si et seulement si elle est bijective.

TD4.9. Exercice Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications telles que $g \circ f$ est injective et f est surjective. Démontrer que g est injective.

TD4.10. Exercice Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$, $h : G \longrightarrow E$ des applications. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont injectives et que $f \circ h \circ g$ est surjective. Démontrer que f, g, h sont bijectives.

TD4.11. Exercice Soit E un ensemble non vide et soit $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$. On considère l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E)^2 & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cup A, X \cup B) \end{array} \right. .$$

1. Démontrer que f n'est pas surjective.
2. Démontrer que f est injective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

TD4.12. Exercice Soit E un ensemble et $f : \mathscr{P}(E) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que, pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$ vérifiant $A \cap B$, $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$.

1. Démontrer que $f(\emptyset) = 0$.
2. Démontrer que, pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.

TD4.13. Exercice Soient E, F, G des ensembles et $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications. Démontrer que, pour tout $C \in \mathscr{P}(G)$, $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right)$.

TD4.14. Exercice Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F.

1. Démontrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Donner un contre-exemple prouvant que l'égalité n'est pas nécessairement vraie. Donner une CNS sur f pour que l'égalité soit vraie, pour tout partie de E.
2. Démontrer que $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. Donner un contre-exemple prouvant que l'égalité n'est pas nécessairement vraie. Donner une CNS sur f pour que l'égalité soit vraie, pour tout partie de F.

TD4.15. Exercice Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Démontrer que, pour toute partie A de E, $f\left(f^{-1}\left(f(A)\right)\right) = f(A)$.
2. Démontrer que, pour toute partie B de F, $f^{-1}\left(f\left(f^{-1}(B)\right)\right) = f^{-1}(B)$.

TD4.16. Exercice Soient E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Démontrer que f est bijective si et seulement si, pour tout $A \in \mathscr{P}(E)$, $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$.