FEUILLE D'EXERCICES N°3

NOMBRES COMPLEXES

TD3.1. EXERCICE Calculer le module et un argument de z^{16} où $z := \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$.

TD3.2. EXERCICE Calculer $(2+2i)^6$.

TD3.3. EXERCICE Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ soit un réel positif.

TD3.4. EXERCICE Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes de module 1 tels que $z_1 z_2 \neq -1$. Démontrer que $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1 z_2}$ est réel et préciser son module.

TD3.5. EXERCICE Soient a et b deux nombres complexes de modules inférieurs à 1. Démontrer que $|a+b| \leqslant \sqrt{2}$ ou $|a-b| \leqslant \sqrt{2}$.

TD3.6. EXERCICE Soient $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$. Démontrer que $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leq \dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

TD3.7. EXERCICE Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$.

TD3.8. EXERCICE Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin^2(kx)$.

TD3.9. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$.

1. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$ de toutes les racines n-ièmes de l'unité.
2. Calculer la produit $\displaystyle\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} \zeta$ de toutes les racines n-ièmes de l'unité.

TD3.10. EXERCICE Résoudre le système d'équations $|z| = \left|\dfrac{1}{z}\right| = |1+z|$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$ et représenter les images des solutions dans le plan complexe.

TD3.11. EXERCICE Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Calculer la partie réelle de $\dfrac{1}{1-z}$.

TD3.12. EXERCICE Déterminer les nombres complexes z tels que $\arg(z) \equiv -\arg(z+1)\ [2\pi]$ et $|z| = 1$ par une méthode algébrique, puis par une méthode trigonométrique.

TD3.13. EXERCICE

1. Soient a, b, c trois nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c = 1$. Démontrer que l'un des trois nombres a, b, c vaut 1.
2. Soient a, b, c, d quatre nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c+d = 1$. L'un des quatre nombres a, b, c, d vaut-il nécessairement 1 ?

TD3.14. EXERCICE Résoudre $z^3 = 1 + i\sqrt{3}$.

TD3.15. EXERCICE Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $z^n = 1$ et $(z+1)^p = 1$.

TD3.16. EXERCICE Résoudre l'équation $z^4 = -7 + 24i$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

TD3.17. EXERCICE Résoudre l'équation $(z-i)^4 + (z+i)^4 = 0$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

TD3.18. EXERCICE Résoudre l'équation $(3z^2+z+1)^2 + (z^2+2z+2)^2 = 0$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

TD3.19. EXERCICE Résoudre l'équation $z^8 = \overline{z}$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

TD3.20. EXERCICE Soit $\alpha \in]0, 2\pi[$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre $\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 2\cos(\alpha)$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

TD3.21. EXERCICE Résoudre l'équation $z^4 - 15(1+2i)z^2 - 88 + 234i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

TD3.22. EXERCICE Résoudre l'équation $iz^3 + (-1+2i)z^2 - (4+i)z + 3(2i-1) = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, sachant qu'il existe une racine réelle.

TD3.23. EXERCICE Soient a et b deux réels distincts et $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z-a)^n - (z-b)^n = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

TD3.24. EXERCICE Soit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Résoudre l'équation $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$ où l'inconnue z appartient à $\mathbb{C}$.

TD3.25. EXERCICE Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. Démontrer que les points $O, M(z_1)$ et $M(z_2)$ sont alignés si et seulement si $\arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [\pi]$.

TD3.26. EXERCICE Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

TD3.27. EXERCICE Le plan est rapporté un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit $(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que le triangle de sommets $M(z_1)$, $M(z_2)$ et $M(z_3)$ est équilatéral si et seulement si $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3$.

TD3.28. EXERCICE Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que les points d'affixes $1+i$, $z+i$ et $1+iz$ soient alignés.

TD3.29. EXERCICE Soient les deux points du plan $A(2+i)$ et $B(6-2i)$. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ soient orthogonaux.

TD3.30. EXERCICE Soient $z \in \mathbb{C}$ et les points du plan $A(z)$, $B\left(z^2\right)$ et $C\left(z^3\right)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que A, B, C soient deux-à-deux distincts.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que A, B, C soient alignés et deux-à-deux distincts.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que A, B, C soient les sommets d'un triangle rectangle.

TD3.31. EXERCICE On s'intéresse à l'équation $z^4 - (10i-5)z^2 - 14i - 48 = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre cette équation.
2. On note z_1 et z_2 les solutions ayant une partie réelle positive, avec $\mathrm{Re}(z1) < \mathrm{Re}(z2)$. Déterminer la similitude directe laissant l'origine invariante et transformant $M_1(z_1)$ en $M_2(z_2)$. Préciser alors ses éléments caractéristiques.

TD3.32. EXERCICE Résoudre l'équation $e^z = 3\sqrt{3} - 3i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.