FEUILLE D'EXERCICES N°2

TRIGONOMÉTRIE

TD2.1. EXERCICE Résoudre l'équation $\cos(5x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD2.2. EXERCICE Résoudre l'équation $\sin(3x+2) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD2.3. EXERCICE Résoudre l'équation $\cos(2x) = \sin(3x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD2.4. EXERCICE Résoudre le système (S) ci-dessous d'inconnue $(x, y) \in]-\pi, \pi]^2$.

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \cos(x) + \sin(y) & = & -\frac{1}{2} \\ \cos(x)\sin(y) & = & -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

TD2.5. EXERCICE Résoudre l'équation $\tan(x) = \sqrt{3}$ d'inconnue un réel x tel que $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

TD2.6. EXERCICE

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de l'équation

$$(E) \qquad \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan(2x)\,.$$

2. Résoudre l'équation (E).

TD2.7. EXERCICE

1. Déterminer le domaine de définition $\mathscr{D}$ de l'équation

$$(E) \qquad \tan(x) = 2\sin(x)\,.$$

2. Résoudre l'équation (E).

TD2.8. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\cos(2x) < \frac{1}{2}$ d'inconnue $x \in]-\pi, \pi]$.

TD2.9. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\cos(5x) \geqslant \sqrt{3}\sin(5x)$ d'inconnue $x \in [0, 2\pi[$.

TD2.10. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\cos^2(x) \geqslant \cos(2x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

TD2.11. EXERCICE Résoudre l'inéquation $\tan(x) \geqslant 2\sin(x)$ d'inconnue un réel $x \in]-\pi, \pi] \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

TD2.12. EXERCICE Préciser l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression :

$$\frac{\sin(2x) + \sin(4x) + \sin(6x)}{1 + \cos(2x) + \cos(4x)}$$

est bien définie, puis la simplifier.

TD2.13. Exercice Simplifier, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin(x) + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) .$$

TD2.14. Exercice Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0 \left[\frac{\pi}{4}\right]$. Démontrer :

$$\frac{1}{\tan(x)} - \tan(x) = \frac{2}{\tan(2x)} .$$

TD2.15. Exercice Démontrer :

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{\sin(x)}{2^n \sin\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [2\pi]$, puis étudier la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{x}{2^k}\right)$.

TD2.16. Exercice Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leqslant n\,|\sin(x)|$.

TD2.17. Exercice

1. Justifier qu'il existe un unique réel $a \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\tan a = \frac{1}{2}$.
2. Justifier qu'il existe un unique réel $b \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que $\tan b = \frac{1}{3}$.
3. Démontrer que $a + b = \frac{\pi}{4}$.

TD2.18. Exercice Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\sin(5x))}{x\,\cos(7x)}$ lorsque x tend vers 0.

TD2.19. Exercice Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\sin(2x)}{\tan(3x)}$ lorsque x tend vers 0.

TD2.20. Exercice Étudier la limite éventuelle de $\dfrac{\tan^2(2x)\,\sin(3x)}{\tan(4x)\,\sin^2(5x)}$ lorsque x tend vers 0.

TD2.21. Exercice

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0\ [\pi]$. Démontrer :

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = \tan\left(\frac{x}{2}\right) .$$

2. En déduire :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} .$$

3. Étudier la limite éventuelle de

$$\frac{1-\cos(2x)}{\sin(3x)\,\tan(4x)}$$

lorsque x tend vers 0.

TD2.22. Exercice Soit la fonction cotangente définie par cotan : $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de cotan.
2. Étudier la périodicité et la parité de cotan, puis proposer un intervalle d'étude I.
3. Étudier les variations de cotan sur I, ainsi que ses limites éventuelles aux bornes de I.
4. Tracer l'allure de la courbe (complète) de cotan.

TD2.23. Exercice Soit la fonction $f : x \longmapsto \cos(2x) - 2\cos(x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la périodicité et la parité de f, puis proposer un intervalle d'étude I.
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Tracer l'allure de la courbe (complète) de f.

TD2.24. Exercice Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{2+\cos(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Étudier la périodicité et la parité de f, puis proposer un intervalle d'étude I.
3. Étudier les variations de f sur I.
4. Tracer l'allure de la courbe (complète) de f.

TD2.25. Exercice Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Justifier que le domaine d'étude peut être réduit à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
3. Étudier les variations de f sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, ainsi que la limite éventuelle de f en $-\dfrac{\pi}{2}^+$.
4. Tracer l'allure de la courbe (complète) de f.