Feuille d'exercices n°1

Logique et raisonnement

TD1.1. Exercice (transitivité de l'implication) Soient P, Q et R des propositions logiques. Démontrer que la proposition :

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (Q \Longrightarrow R)] \Longrightarrow (P \Longrightarrow R)$$

est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P, Q et R.

TD1.2. Exercice (modus tollens) Soient P et Q des propositions logiques. Démontrer que la proposition :

$$[(P \Longrightarrow Q) \wedge (\neg Q)] \Longrightarrow (\neg P)$$

est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de P et Q.

TD1.3. Exercice (liens entre propositions quantifiées) Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats de la variable x représentant un élément de E. Quel lien (implication, équivalence) existe-t-il entre des propositions suivantes.

1. $[\forall x \in E \quad (P(x) \wedge Q(x))]$ et $[(\forall x \in E \quad P(x)) \wedge (\forall x \in E \quad Q(x))]$
2. $[\forall x \in E \quad (P(x) \vee Q(x))]$ et $[(\forall x \in E \quad P(x)) \vee (\forall x \in E \quad Q(x))]$
3. $[\exists x \in E \quad (P(x) \wedge Q(x))]$ et $[(\exists x \in E \quad P(x)) \wedge (\exists x \in E \quad Q(x))]$
4. $[\exists x \in E \quad (P(x) \vee Q(x))]$ et $[(\exists x \in E \quad P(x)) \vee (\exists x \in E \quad Q(x))]$

TD1.4. Exercice (démonstrations de propositions quantifiées) Démontrer les assertions suivantes.

1. $\forall a \in \mathbb{N}^* \quad \exists b \in \mathbb{N}^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad e^{ax} > b$
2. $\exists a \in \mathbb{N} \quad \forall b \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \ln\left(x^2 + |a - 2022|^{2023}\right) < b$

TD1.5. Exercice (propositions quantifiées et négations d'icelles) Ici, f désigne une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Écrire chacune des propositions suivantes sous la forme d'une proposition quantifiée, puis expliciter la négation de chacune d'elles.

1. $P_1 =$ « la fonction f est paire »
2. $P_2 =$ « la fonction f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ »
3. $P_3 =$ « la fonction f s'annule sur $\mathbb{R}$ »
4. $P_4 =$ « la fonction f est croissante et positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ »
5. $P_5 =$ « la fonction f admet un maximum sur $\mathbb{R}$ »

TD1.6. Exercice (Somme de deux carrés réels nulle) Démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad \left(x^2 + y^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y = 0\right).$$

TD1.7. Exercice (une équation avec des radicaux) Déterminer tous les réels $x \geqslant 0$ tels que :

$$\sqrt{x+15} - \sqrt{x} = \sqrt{15}.$$

TD1.8. Exercice (Des coefficients d'une fonction polynomiale de degré 2) Soient a et b deux réels fixés. On considère l'application :

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+b\,. \end{array} \right.$$

1. On suppose que :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0\,.$$
Démontrer $a = b = 0$.
2. On suppose que :
$$\exists\, x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0\,.$$
Démontrer $ab \leqslant 0$.

TD1.9. Exercice ($\sin$ est-elle la composée de $\cos$ par une fonction ?) L'ensemble $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'assertion suivante :

$$\exists\, f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad f(\cos(x)) = \sin(x)$$

est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

TD1.10. Exercice (principe des tiroirs) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si l'on range $n+1$ paires de chaussettes dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir comportant au moins 2 paires de chaussettes.

TD1.11. Exercice (écart entre deux points d'une subdivision du segment $[0,1]$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $n+1$ réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que :

$$0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant 1\,.$$

On veut démontrer la propriété suivante : il y a au moins deux nombres consécutifs parmi $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dont la distance est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{n}$.

1. Écrire la propriété à démontrer sous forme d'une proposition quantifiée.
2. Écrire la négation de la proposition quantifiée énoncée en 1.
3. Démontrer la propriété en raisonnant par l'absurde.

TD1.12. Exercice (sommes de Newton)

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

TD1.13. Exercice (somme des premiers nombres impairs)

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.
2. Proposer une explication géométrique du résultat établi en 1.

TD1.14. Exercice (inégalité de Bernoulli)

1. Soit $x > -1$ un nombre réel. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
2. Proposer une interprétation géométrique du résultat établi en 1.

TD1.15. EXERCICE (TOUS LES CRAYONS ONT LA MÊME COULEUR) Nous proposons une démonstration de la propriété suivante :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n crayons ont toujours la même couleur.

Nous raisonnons par récurrence sur n.

- *Initialisation à $n = 1$* S'il n'y a qu'un seul crayon, il n'y a rien à prouver.
- *Hérédité* Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé et prouvons-la au rang $n+1$. On considère donc $n+1$ crayons que l'on numérote de 1 à $n+1$.
  — On forme un premier paquet de crayons constitué de ceux numérotés de 1 à n. D'après l'hypothèse de récurrence, ces n crayons ont la même couleur.
  — On forme un deuxième paquet de crayons constitué de ceux numérotés de 2 à $n+1$. Toujours d'après l'hypothèse de récurrence, ces n crayons ont la même couleur.
  Comme le crayon n°2 appartient appartient aux deux paquets, les couleurs des premier et deuxième paquets sont identiques. Les $n+1$ crayons ont donc la même couleur.

Où est l'erreur ?

TD1.16. EXERCICE (PRODUIT DES PREMIÈRES FACTORIELLES DES IMPAIRS) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\prod_{k=0}^{n} (2k+1)! = 1! \times 3! \times 5! \times \ldots \times (2n+1)! \geqslant [(n+1)!]^{n+1} .$$

TD1.17. EXERCICE (SOMMES PARTIELLES DE LA SÉRIE EXPONENTIELLE) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\exp(x) \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} .$$

TD1.18. EXERCICE (INFINITÉ DE NOMBRES PREMIERS) On rappelle qu'un nombre entier naturel est premier s'il possède précisément deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37$.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier qui divise n à l'aide d'un raisonnement par récurrence forte.
2. On considère r nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Démontrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$ n'est divisible par aucun des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_r$.
3. Démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

TD1.19. EXERCICE (THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ARITHMÉTIQUE) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ et des nombres premiers $p_1, p_2, \ldots, p_r$ tels que :

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k = p_1 p_2 \ldots p_r .$$

Nous avons établi que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 se factorise en produit de nombres premiers. Nous démontrerons plus tard dans l'année que cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

TD1.20. Exercice (suites récurrentes linéaires d'ordre 2) Nous fixons un réel a, un réel non nul b et nous considérons l'équation :

$$(E) \qquad x^2 = ax + b$$

d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ la suite réelle définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. On suppose ici que (E) possède deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2. Démontrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n .$$
2. On suppose à présent que (E) possède une unique solution réelle r. Démontrer qu'il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_n = \lambda r^n + \mu n r^n .$$

TD1.21. Exercice (caractère non entier des sommes partielles de la série harmonique) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$, il existe un entier impair p_n et un entier pair non nul q_n tels que $H_n = \dfrac{p_n}{q_n}$.
2. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 2$, H_n n'est pas entier.