ÉQUATIONS D'UN HYPERPLAN DE $\mathbf{K}^n$ DANS $\mathscr{B}_0$

Soient $n \in \mathbf{N}_{\geqslant 2}$, $\mathscr{B}_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et

$$\left(u_1 = \left(u_{1,1}, \ldots, u_{1,n}\right),\ u_2 = \left(u_{2,1}, \ldots, u_{2,n}\right),\ \ldots,\ u_{n-1} = \left(u_{n-1,1}, \ldots, u_{n-1,n}\right)\right)$$

une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\mathbf{K}^n$ qui engendre un hyperplan noté H. On propose deux méthodes pour déterminer une équation de H dans la base $\mathscr{B}_0$, i.e. calculer $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ tel que

$$H = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n \ :\ a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0\right\}$$

§ 1. AVEC L'ALGORITHME DU PIVOT DE GAUSS

Soit $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$. Comme $H = \mathrm{Vect}\left(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}\right)$

$$x \in H \iff \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1} \quad x = \lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot u_{n-1} \tag{1}$$

Autrement dit, le vecteur x appartient à H si et seulement si l'équation

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot u_{n-1} = x \tag{2}$$

d'inconnue $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1}$ possède une solution. Comme

$$u_1 = \left(u_{1,1}, \ldots, u_{1,n}\right) \quad u_2 = \left(u_{2,1}, \ldots, u_{2,n}\right) \quad \ldots \quad u_{n-1} = \left(u_{n-1,1}, \ldots, u_{n-1,n}\right) \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

l'équation (2) est équivalente à

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{2,1} & \ldots & u_{n-1,1} \\ u_{1,2} & u_{2,2} & \ldots & u_{n-1,2} \\ \vdots & \vdots & & \\ u_{1,n} & u_{2,n} & \ldots & u_{n-1,n} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

Nous déduisons de ce début d'étude que

$$x \in H \iff \text{l'équation (3) d'inconnue } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1} \text{ possède une solution}$$

Nous sommes donc amenés à déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ pour que l'équation (3) possède une solution.

Comme la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ est libre, l'application de l'algorithme du pivot de Gauß à la matrice A livre une matrice échelonnée réduite dont le nombre de pivots est $n-1$. En effet, sinon la matrice A aurait un noyau non nul et la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ serait liée.

Après application de la phase de descente de l'algorithme du pivot de Gauß l'équation (3) est transformée en

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & * & * & * & \ldots & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_{n-2} \\ \lambda_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & \ldots & * \\ * & * & * & \ldots & * \\ * & * & * & \ldots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & * & \ldots & * \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

où le symbole $\blacksquare$ (resp. $*$) désigne un scalaire non nul (resp. un scalaire quelconque). Comme les opérations élémentaires appliquées dans l'algorithme du pivot de Gauß transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent

$$\begin{aligned} x \in H &\iff \text{l'équation (4) d'inconnue } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1} \text{ possède une solution} \\ &\iff \boxed{a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n = 0} \end{aligned}$$

La complexité de cette méthode est celle de l'algorithme du pivot de Gauß pour résoudre un système linéaire à n équations à $n-1$ inconnues, soit $\mathrm{O}\left(n^3\right)$.

§ 2. EN COMPLÉTANT LA BASE DE H FOURNIE EN UNE BASE DE $\mathbf{K}^n$

La famille $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ est une famille libre de vecteurs de $\mathbf{K}^n$. D'après le théorème de la base incomplète, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_i)$$

forme une base de $\mathbf{K}^n$. Notons $\left(u_1^*, u_2^*, \ldots, u_{n-1}^*, e_i^*\right)$ la base duale de la base $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_i)$ de $\mathbf{K}^n$. Ainsi

$$\forall\, x \in \mathbf{K}^n \quad x = u_1^*(x) \cdot u_1 + u_2^*(x) \cdot u_2 + \ldots + u_{n-1}^*(x) \cdot u_{n-1} + e_i^*(x) \cdot e_i \tag{5}$$

Nous en déduisons

$$\forall\, x \in \mathbf{K}^n \quad x \in H \quad \Longleftrightarrow \quad e_i^*(x) = 0$$

Donc e_i^* est une forme linéaire non nulle ($e_i^*(e_i) = 1$) dont H est le noyau. Comme il existe $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ tel que

$$e_i^* \left| \begin{array}{ccc} \mathbf{K}^n & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) & \longmapsto & a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n \end{array} \right.$$

nous obtenons une équation de H dans la base $\mathscr{B}_0$.

Pour déterminer concrètement un $i \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, e_i)$$

forme une base de $\mathbf{K}^n$, on peut faire jusqu'à n tentatives, puisqu'on teste les vecteurs $e_1, e_2, \ldots, e_n$ jusqu'à en trouver un qui convient.

Fixons un $i \in [\![1, n]\!]$.

Pour savoir si le vecteur e_i convient, on résout l'équation

$$\lambda_1 \cdot u_1 + \lambda_2 \cdot u_2 + \ldots + \lambda_{n-1} \cdot u_{n-1} + \beta \cdot e_i = x \tag{6}$$

d'inconnue $\left(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}, \beta\right) \in \mathbf{K}^n$ où $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ est un paramètre. On se ramène, en considérant les coordonnées des vecteurs en jeu dans la base $\mathscr{B}_0$, à résoudre un système à n équations et à n inconnues par la méthode du pivot de Gauß, de manière analogue à ce qui a été exposé pour la première méthode.

Le vecteur e_i convient si et seulement si, pour chaque $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ fixé, l'équation (6) possède une unique solution. Dans ce cas, la résolution du système livre des scalaires $a_1, a_2, \ldots, a_n$ non tous nuls tels que

$$\beta = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + \ldots + a_n \cdot x_n$$

Comme $\beta = e_i^*(x)$, nous avons une deuxième méthode pour expliciter une équation de H dans la base $\mathscr{B}_0$.

La complexité de cette méthode est en $\mathrm{O}\left(n^4\right)$. En effet, outre les résolutions de systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauß qui coûtent $\mathrm{O}\left(n^3\right)$, il faut prendre en compte les essais effectués pour compléter la base $(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ en une base de $\mathbf{K}^n$ par ajout d'un des vecteurs de la base canonique.