Un corrigé du devoir Surveillé n°13

Q1 — C26.36

Q2 — C26.48

Q3 — C26.51

Q4 — C26.57

Q5 — C26.79 et C26.80

Q6 — Soit des réels $x_1 < x_2$ et $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0,1[^2$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.
Posons

$$y := \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2$$

Comme $x_1 < x_2$ et $\lambda_1 > 0$, $\lambda_1 \cdot x_1 < \lambda_1 \cdot x_2$. D'où

$$y = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 < \lambda_1 \cdot x_2 + \lambda_2 \cdot x_2 < x_2$$

De même, $x_1 < y$. Ainsi

$$x_1 < y < x_2$$

De la définition de y, nous déduisons $\lambda_1 = \dfrac{x_2 - y}{x_2 - x_1}$. Ainsi

$$\begin{aligned}
f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) < \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) \quad &\iff \quad f(y) < \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} \cdot f(x_1) + \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} \cdot f(x_2) \\
&\iff \quad \frac{x_2 - y}{x_2 - x_1} \cdot (f(y) - f(x_1)) < \frac{y - x_1}{x_2 - x_1} \cdot (f(x_2) - f(y)) \\
&\iff \quad \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} < \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y} \qquad \left[\frac{x_2 - x_1}{(y - x_1)(x_2 - y)} > 0\right]
\end{aligned}$$

Nous allons établir cette dernière inégalité stricte qui livrera le résultat demandé.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc *a fortiori* continue sur le segment $[x_1, y]$ et dérivable sur l'ouvert $]x_1, y[$. D'après le théorème des accroissements finis

$$\exists c_1 \in]x_1, y[\quad f'(c_1) = \frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1}$$

De même

$$\exists c_2 \in]y, x_2[\quad f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

Comme $c_1 < y < c_2$ et f' est strictement croissante

$$\frac{f(y) - f(x_1)}{y - x_1} = f'(c_1) < f'(c_2) = \frac{f(x_2) - f(y)}{x_2 - y}$$

Q7 — Notons tout d'abord que la fonction f est convexe, puisque dérivable avec une dérivée croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque strictement croissante sur $\mathbb{R}$). L'inégalité de Jensen vaut donc.
Nous raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$.
• Initialisation à $n = 2$. Cf. **Q6**.
• Hérédité. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient des réels $x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1}$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in]0,1[^{n+1}$ tel que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1} = 1$. Alors

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}) = f\left((1 - \lambda_{n+1}) \cdot y + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}\right)$$

où $y := \dfrac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_1 + \ldots + \dfrac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_n$. Comme

$$x_1 < x_{n+1}, \ldots, x_n < x_{n+1} \quad \text{et} \quad \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} > 0, \ldots, \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} > 0$$

il vient

$$y := \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_1 + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_n < \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_{n+1} + \ldots + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} \cdot x_{n+1} = x_{n+1}$$

Comme $y < x_{n+1}$, $\lambda_1 \in]0,1[$ et $1-\lambda_1 \in]0,1[$, **Q6** livre

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}) = f\left((1-\lambda_{n+1}) \cdot y + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}\right) < (1-\lambda_{n+1}) \cdot f(y) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1})$$

D'autre part, l'inégalité de Jensen livre

$$(1-\lambda_{n+1}) \cdot f(y) \leqslant \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(x_n)$$

Des deux dernières inégalités, nous déduisons

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n + \lambda_{n+1} \cdot x_{n+1}) < \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(x_n) + \lambda_{n+1} \cdot f(x_{n+1})$$

Q8 — Choisissons une énumération (liste exhaustive et sans répétition) $x_1, \ldots, x_n$ des éléments de $\{x \in X(\Omega) \,:\, P(X=x) > 0\}$ et posons, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\lambda_i := P(X = x_i) > 0$$

Ainsi

$$1 = P(X \in X(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

La formule de transfert et l'inégalité de Jensen livrent alors

$$f(E(X)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) = E(f(X))$$

Q9 — Nous conservons les notations introduites en **Q8** et raisonnons par double implication.
• Sens réciproque. Supposons que X est constante presque sûrement. Alors

$$n := \mathrm{Card}\left(\{x \in X(\Omega) \,:\, P(X=x) > 0\}\right) = 1$$

$E(X) = x_1$ et, avec le théorème de transfert (cas particulièrement simple d'application), $E(f(X)) = f(x_1)$. Ainsi y a-t-il égalité dans l'inégalité de **Q8**.
• Sens direct, en raisonnant par contraposée. Supposons que X n'est pas constante presque sûrement. Alors

$$n := \mathrm{Card}\left(\{x \in X(\Omega) \,:\, P(X=x) > 0\}\right) \geqslant 2$$

et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des éléments de $]0,1[$ de somme 1. D'après **Q8**

$$f(E(X)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i\right) < \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot f(x_i) = E(f(X))$$

Il n'y a donc pas égalité dans l'inégalité de **Q8**.

Q10 — Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2}(e_i) = e_{\sigma_1(\sigma_2(i))} = f_{\sigma_1 \circ \sigma_2}(e_i)$$

Les endomorphismes $f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2}$ et $f_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$ de $\mathbb{R}^n$ coïncident sur la base canonique. Ils sont donc égaux, i.e.

$$f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2} = f_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$$

Q11 — Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$f_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}}(e_i) = e_i = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}(e_i)$$

Les endomorphismes $f_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}}$ et $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$ coïncident sur la base canonique. Ils sont donc égaux, i.e.

$$f_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Alors, avec **Q9** il vient

$$f_\sigma \circ f_{\sigma^{-1}} = f_{\sigma \circ \sigma^{-1}} = f_{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$$

et de même $f_{\sigma^{-1}} \circ f_\sigma = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$. Ainsi f_σ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $f_\sigma^{-1} = f_{\sigma^{-1}}$.

Q12 — • Caractère bien défini. Soit $\sigma \in S_n$. D'après **Q11**, f_σ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ et donc $P_\sigma := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_\sigma) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
• Morphisme de groupes. Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2$. D'après **Q9** le lien fondamental entre la composition d'applications linéaires et le produit matriciel

$$\varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) = P_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f_{\sigma_1 \circ \sigma_2}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2}\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f_{\sigma_1}\right) \times \circ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f_{\sigma_2}\right) = P_{\sigma_1} \times P_{\sigma_2} = \varphi(\sigma_1) \times \varphi(\sigma_2)$$

Q13 — Par définition

$$\det(P_\sigma) = \det(f_\sigma) = \det_{\mathscr{B}}\left(f_\sigma(e_1), f_\sigma(e_2), \dots, f_\sigma(e_n)\right) = \det_{\mathscr{B}}\left(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}\right)$$

Le caractère alterné de $\det_{\mathscr{B}}$ donne alors

$$\det(P_\sigma) = \varepsilon(\sigma) \cdot \underbrace{\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)}_{:=1}$$

Le déterminant de la matrice P_σ est donc la signature de σ.

Q14 — Soit ψ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^n$ et la base (1) de $\mathbb{R}$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$$

La forme linéaire ψ est non identiquement nulle et son noyau est H. Ainsi H-est-il un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Q15 — L'application p est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. Nous calculons

$$\begin{aligned}
p \circ p &= \left(\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma\right) \circ \left(\frac{1}{n!} \cdot \sum_{\tau \in S_n} f_\tau\right) \\
&= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\tau \in S_n} f_\sigma \circ f_\tau \qquad [\text{les applications } f_\sigma \text{ sont linéaires}] \\
&= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \cdot \sum_{\tau \in S_n} f_{\sigma \circ \tau} \qquad [\mathbf{Q9}] \\
&= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{\gamma \in S_n} f_\gamma \qquad [\text{ si } \sigma \in S_n, \text{l'application } \gamma \in S_n \longmapsto \sigma^{-1} \circ \gamma \in S_n \text{ est bijective }] \\
&= \left(\frac{1}{n!}\right)^2 \cdot \sum_{\gamma \in S_n} \sum_{\sigma \in S_n} f_\gamma
\end{aligned}$$

Comme, pour tout $\gamma \in S_n$

$$\sum_{\sigma \in S_n} f_\gamma = \mathrm{Card}(S_n) \cdot f_\gamma = n! \cdot f_\gamma$$

il vient

$$p \circ p = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\gamma \in S_n} f_\gamma = p$$

Q16 — • Image de p. D'après le cours

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(p(e_1), p(e_2), \dots, p(e_n)\right)$$

Soit $i \in [\![2, n]\!]$ et $\tau \in S_n$ la transposition qui échange 1 et i. Nous calculons

$$\begin{aligned}
p(e_i) &= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(e_i) \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} e_{\sigma(i)} \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\gamma \in S_n} e_{\gamma \circ \tau(i)} \qquad [\text{ l'application } \gamma \in S_n \longmapsto \gamma \circ \tau \in S_n \text{ est bijective }] \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\gamma \in S_n} e_{\gamma(1)} \\
&= \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\gamma \in S_n} f_\gamma(e_1) \\
&= p(e_1)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons

$$\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\left(p(e_1)\right)$$

puis $\mathrm{Rg}\left(p\right) \leqslant 1$.
Nous remarquons que si u est le vecteur de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$u := e_1 + e_2 + \ldots + e_n \qquad \text{[non nul car la famille } \mathscr{B} \text{ est libre]}$$

alors

$$\forall \sigma \in S_n \quad f_\sigma(u) = e_{\sigma(1)} + e_{\sigma(2)} + \ldots + e_{\sigma(n)} = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = u \qquad [\sigma \text{ est bijective}]$$

Ainsi

$$p(u) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma(u) = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} u = \frac{1}{n!} \cdot \mathrm{Card}\left(S_n\right) \cdot u = u$$

Ainsi $u \in \mathrm{Im}\left(p\right)$.
Nous savons alors que $\mathrm{Rg}\left(p\right) = 1$ et que (u) est une base de l'image.
• Noyau de p. D'après la formule du rang

$$n = \dim(\mathrm{Ker}\left(p\right)) + \mathrm{Rg}\left(p\right) = \dim(\mathrm{Ker}\left(p\right)) + 1$$

et donc $\mathrm{Ker}\left(p\right)$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. L'énoncé nous laisse à penser que cet hyperplan pourrait être H. Vérifions le.
Comme H et $\mathrm{Ker}\left(p\right)$ sont deux sous-espaces vectoriels de dimension $n-1$, démontrer l'inclusion $H \subset \mathrm{Ker}\left(p\right)$ suffit pour établir $\mathrm{Ker}\left(p\right) = H$.
Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in H$.

$$\begin{aligned}
p(x) &= p\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot e_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p(e_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \cdot p(e_1) \qquad \left[p(e_1) = p(e_2) = \ldots = p(e_n)\right] \\
&= 0 \qquad [\text{la somme des coordonnées de } x \text{ dans la base } \mathscr{B} \text{ est nulle car } x \in H]
\end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que $\mathrm{Ker}\left(p\right) = H$ et nous en désuisons que

$$(e_1 - e_2, e_1 - e_3, \ldots, e_1 - e_n)$$

est une base de $\mathrm{Ker}\left(p\right) = H$ (le caractère générateur de H est clair et une famille génératrice à $n-1$ éléments d'un espace vectoriel de dimension $n-1$ une forme une base de cet espace).

Q17 — La trace de A vaut 6. Calculons son déterminant.

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad [L_1 \leftrightarrow L_2] \\
&= (-1) \cdot \begin{vmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad [L_2 \leftarrow L_2 - 2 \cdot L_1 \;\; , \;\; L_3 \leftarrow L_3 - L_1] \\
&= (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \qquad \left[\text{développement par rapport à } C_1\right] \\
&= (-1) \cdot (-3 - 1) \\
&= 4
\end{aligned}$$

Q18 — Soit $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\chi_A(\lambda) = \det\left(\lambda \cdot I_3 - A\right) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

Nous calculons

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \lambda-2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & -1 \\ \lambda-4 & \lambda-2 & -1 \\ \lambda-4 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} && [C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3] \\
&= (\lambda-4)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} && \left[\text{linéarité par rapport à } C_1\right] \\
&= (\lambda-4)\cdot\begin{vmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} && [L_2 \leftarrow L_2-L_1 \ , \ L_3 \leftarrow L_3-L_1] \\
&= (\lambda-4)\cdot(1-\lambda)^2 && \left[\text{déterminant d'une matrice triangulaire}\right] \\
&= \lambda^3-6\lambda^2+9\lambda-4 && \left[\text{la forme factorisée précédente est préférable}\right]
\end{aligned}$$

Q19 — On note, pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $m_{i,j}$ le coefficient d'adresse (i,j) de la matrice M. Soit $\lambda\in\mathbb{C}$.

$$\chi_M(\lambda)=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^{n}[\lambda\cdot I_n-M]_{k,\sigma(k)}$$

Comme

$$(\star)\qquad \forall\,(\sigma,k)\in S_n\times[\![1,n]\!]\quad [\lambda\cdot I_n-M]_{k,\sigma(k)}=\begin{cases}\lambda-m_{k,k} & \text{si } \sigma(k)=k\\ -m_{k,\sigma(k)} & \text{si } \sigma(k)\neq k\end{cases}$$

nous savons déjà que χ_M est un polynôme de degré inférieur à n.
En analysant plus finement $(\star)$, nous observons que si $\sigma\in S_n$ n'est pas l'identité alors son support possède au moins deux éléments et donc

$$\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ \lambda & \longmapsto & \displaystyle\prod_{k=1}^{n}[\lambda\cdot I_n-M]_{k,\sigma(k)}\end{array}\right.$$

est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2. Ainsi

$$(\star\star)\qquad \chi_M(\lambda)=\prod_{k=1}^{n}\left(\lambda-m_{k,k}\right)+\underbrace{\sum_{\sigma\in S_n\setminus\{\mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}\}}\varepsilon(\sigma)\cdot\prod_{k=1}^{n}[\lambda\cdot I_n-M]_{k,\sigma(k)}}_{\deg\leqslant n-2}$$

Nous en déduisons que le degré de χ_M est n et que son coefficient dominant est 1.

Q20 — Nous savons que le coefficient de degré 0 d'un polynôme égale sa valeur en 0. Ainsi

$$\left[\chi_M\right]_0=\chi_M(0)=\det(-M)=(-1)^n\cdot\det(M)$$

Q21 — D'après $(\star\star)$

$$\left[\chi_M\right]_{n-1}=\left[\prod_{k=1}^{n}\left(X-m_{k,k}\right)\right]_{n-1}$$

Ce dernier polynôme étant unitaire et scindé sur $\mathbb{C}$, les formules de Viète (C16.83) livrent

$$\left[\prod_{k=1}^{n}\left(X-m_{k,k}\right)\right]_{n-1}=-\sum_{k=1}^{n}m_{k,k}=-\mathrm{Tr}\,(M)$$

Ainsi le coefficient de degré $n-1$ de χ_M égale $-\mathrm{Tr}\,(M)$.

Q22 — Soit $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $M=P\,N\,P^{-1}$.
Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Nous calculons

$$\begin{aligned}
\chi_M(\lambda) &= \det(\lambda\cdot I_n-M)\\
&= \det\left(\lambda\cdot P\,P^{-1}-P\,N\,P^{-1}\right)\\
&= \det\left(P\,\lambda\cdot I_n\,P^{-1}-P\,N\,P^{-1}\right)\\
&= \det\left(P\,(\lambda\cdot I_n-N)\,P^{-1}\right)\\
&= \det(P)\cdot\det(\lambda\cdot I_n-N)\cdot\det\left(P^{-1}\right)\\
&= \det(P)\cdot\chi_N(\lambda)\cdot\det(P)^{-1}\\
&= \chi_N(\lambda)
\end{aligned}$$

Ainsi $\chi_M = \chi_N$.

Q23 — Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - u) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - u)) = \det(\lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E) - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \det(\lambda \cdot I_n - \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)) = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)}(\lambda)$$

Ainsi $\chi_u = \chi_{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)}$. D'après **Q19**, χ_u est un polynôme unitaire de degré n.

Q24 — Nous raisonnons par équivalence

$$\begin{array}{rcll} \chi_u(\lambda) = 0 & \iff & \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - u) = 0 & \\ & \iff & \lambda \cdot \mathrm{id}_E - u \text{ n'est pas un automorphisme de } E & \\ & \iff & \lambda \cdot \mathrm{id}_E - u \text{ n'est pas injectif} & [E \text{ est de dimension finie}] \\ & \iff & \mathrm{Ker}(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - u) \neq \{0_E\} & \\ & \iff & \exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad \lambda \cdot x - u(x) = 0_E & \\ & \iff & \exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda \cdot x & \end{array}$$

Q25 — Le polynôme χ_u est de degré $n \geqslant 1$ et à coefficients complexes. D'après le théorème de d'Alembert-Gauß, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_u(\lambda) = 0$.
D'après **Q24**, il existe un vecteur non nul e_1 de E tel que $u(e_1) = \lambda \cdot e_1$.
Comme la famille (e_1) est libre, nous pouvons la compléter avec des vecteurs $e_2, \ldots, e_n$ de E de sorte que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base de E.
Comme

$$u(e_1) = \lambda \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + \ldots + 0 \cdot e_n$$

il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$$

Q26 — Pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n-1]\!]^2$, notons $a_{k,\ell}$ le coefficient d'adresse (k, ℓ) de la matrice A de sorte que

$$a_{k,\ell} = [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)]_{k+1,\ell+1}$$

Soit $\ell \in [\![2, n]\!]$. Il nous faut prouver que

$$p \circ u \circ i(e_\ell) = \sum_{k=2}^{n} a_{k-1,\ell-1} \cdot e_\ell \qquad [\text{les vecteurs de } \mathscr{B}_F \text{ sont indexés de 2 à } n\text{, les lignes/colonnes de } A \text{ de 1 à } n-1]$$

Nous calculons

$$p \circ u \circ i(e_\ell) = p(u(e_\ell)) = p\left(\sum_{k=1}^{n} [\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)]_{k,\ell} \cdot e_k\right) = \sum_{k=2}^{n} \underbrace{[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)]_{k,\ell}}_{a_{k-1,\ell-1}} \cdot e_k$$

Q27 — On commence par remarquer que si E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure} \quad \iff \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad u_k \in \mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_k)$$

Nous raisonnons par récurrence sur $n \geqslant 2$.
• Initialisation à $n = 2$. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension 2 et $u \in \mathscr{L}(E)$. D'après **Q25**, il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & a \end{pmatrix} \text{ où } (\lambda, a) \in \mathbb{C}^2$$

L'assertion est donc démontrée dans ce cas.
• Hérédité. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n+1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. D'après **Q25**, il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & * & \ldots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

Si on note $F = \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1})$ et i, p les applications linéaires définies par

$$i \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad p \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} x_k \cdot e_k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} x_k \cdot e_k \end{array} \right.$$

alors la matrice A égale la matrice de l'endomorphisme $p \circ u \circ i$ de F dans la base $\mathscr{B}_F := (e_2, \dots, e_{n+1})$ (cf. **Q26**).
En appliquant l'hypothèse de récurrence à l'endomorphisme $p \circ u \circ i$ de F, qui est de dimension n, on obtient une base $\mathscr{C} = (f_2, \dots, f_{n+1})$ de F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p \circ u \circ i)$ est triangulaire supérieure.
La famille $(e_1, e_2, \dots, e_{n+1})$ est libre. Donc

$$e_1 \notin \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_{n+1}) = F = \mathrm{Vect}\big(f_2, \dots, f_{n+1}\big)$$

Comme la famille $(f_2, \dots, f_{n+1})$ est libre, nous en déduisons que la famille $(e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$ est libre. Par cardinalité-dimension, la famille

$$\mathscr{D} := (e_1, f_2, \dots, f_{n+1})$$

est une base de E.
Nous allons démontrer que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}}(u)$ est triangulaire supérieure. Comme

$$f(e_1) = \lambda \cdot e_1 \in \mathrm{Vect}(e_1)$$

il reste à établir que, pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, $u(f_k) \in \mathrm{Vect}\big(e_1, f_2, \dots, f_k\big)$.
Soit $k \in [\![2, n+1]\!]$. L'application p est la projection de E sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_1)$. Ainsi

$$u(f_k) = u(i(f_k)) = \underbrace{u(i(f_k)) - p(u(i(f_k)))}_{\in \mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}(e_1)} + p(u(i(f_k)))$$

Comme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(p \circ u \circ i)$ est triangulaire supérieure

$$p(u(i(f_k))) \in \mathrm{Vect}\big(f_2, \dots, f_k\big)$$

Nous en déduisons que $u(f_k) \in \mathrm{Vect}\big(e_1, f_2, \dots, f_k\big)$.

Q28 — Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et φ_M l'unique endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi_M\big) = M$$

D'après **Q27**, il existe une base $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $T := \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(\varphi_M\big) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure.
Par théorème de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\big(\varphi_M\big) = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\big(\varphi_M\big)\ P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}$$

i.e.

$$M = P\ T\ P^{-1}$$

où $P := P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

Q29 — Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
• <u>Présentation d'une méthode pour calculer les puissances de M.</u> D'après **Q28**, il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$M = P\ T\ P^{-1}$$

Pour déterminer un tel couple (P, T) en suivant la démarche exposée ci-dessus, la première étape est de déterminer une racine du polynôme χ_M (cf. **Q25**).
Au moyen d'un raisonnement par récurrence, on établit

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad M^k = P\ T^k\ P^{-1}$$

La calcul des puissances de M est donc ramené au calcul des puissances de T.
On pose

$$D := \mathrm{Diag}\big([T]_{1,1}, [T]_{2,2}, \dots, [T]_{n,n}\big) \quad \text{et} \quad N := T - D$$

de sorte que $T = D + N$. La matrice D est diagonale et la matrice N est triangulaire supérieure stricte donc nilpotente. Les puissances de D et N sont donc aisée à calculer.
• <u>Premier obstacle à la mise en œuvre de la méthode.</u> Si le théorème de d'Alembert-Gauß assure l'existence d'une racine de χ_M, on ne peut toujours en calculer une en pratique.
• <u>Deuxième obstacle à la mise en œuvre de la méthode.</u> Les matrices D et N ne commutent pas nécessairement. On ne peut donc pas *a priori* appliquer la formule du binôme de Newton pour calculer les puissances de $T = D + N$.

Q30 — • Heuristique. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que M est trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$M = P \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}}_{=:T} P^{-1}$$

Comme en **Q22**, on démontre que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \chi_M(\lambda) = \chi_T(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_2 - T) = \left|\begin{pmatrix} \lambda - a & -b \\ 0 & \lambda - c \end{pmatrix}\right| = (\lambda - a)\cdot(\lambda - c)$$

Ainsi χ_M est scindé sur $\mathbb{R}$.
De cette étude, on déduit que

$$M \text{ trigonalisable sur } \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \chi_M \text{ est scindé sur } \mathbb{R}$$

• Contre-exemple. Considérons la matrice

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_2 - M) = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

Comme le polynôme $X^2 - 2X + 2$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$ (son discriminant égale $-4 < 0$), la matrice M n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q31 — La relation « être semblables » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après **Q28**, il suffit de démontrer que toute matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire inférieure pour établir le résultat demandé.
Soit $T^+ \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure. On note $\mathscr{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et φ_{T^+} l'unique endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\varphi_{T^+}\right) = T^+$$

Alors

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \varphi_{T^+}(X_k) \in \mathrm{Vect}(X_1, \ldots, X_k) \qquad \left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\varphi_{T^+}\right) = T^+ \text{ est triangulaire supérieure}\right]$$

On pose, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$Y_n := X_{n+1-k}$$

La famille

$$\mathscr{C} := (Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n) = (X_n, X_{n-1}, X_{n-1}, \ldots, X_1)$$

est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Comme, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$\varphi_{T^+}(Y_k) = \varphi_{T^+}(X_{n+1-k}) \in \mathrm{Vect}(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_{n+1-k}) = \mathrm{Vect}(Y_k, \ldots, Y_{n-2}, Y_{n-1}, Y_n)$$

la matrice $T^- := \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi_{T^+})$ est triangulaire inférieure.
Par théorème de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\varphi_{T^+}\right) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\varphi_{T^+}\right)\ P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$$

i.e.

$$T^+ = P\ T^-\ P^{-1}$$

où $P := P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Les matrices T^+ et T^- sont donc semblables.

Q32 — Nous suivons les idées exposées en **Q25**, **Q27** (cf. cas $n = 2$) et **Q28**.
• Introduction de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à B. On note $\mathscr{B} = (X_1, X_2)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ et φ_B l'unique endomorphisme de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\varphi_M\right) = M$$

i.e.

$$\varphi_B \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C}) \\ X & \longmapsto & BX \end{array} \right.$$

• Calcul de $\chi_B = \chi_{\varphi_B}$ et détermination de ses racines complexes. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\chi_{\varphi_B}(\lambda) = \chi_B(\lambda) = \det(\lambda \cdot I_2 - B) = \left|\begin{pmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{pmatrix}\right| = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

• Détermination d'un vecteur Y_1 non nul tel que $\varphi_B(Y_1) = 2 \cdot Y_1$. D'après **Q24**, il existe un vecteur $Y_1 \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$Y_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad BY_1 = \varphi_B(Y_1) = 2 \cdot Y_1$$

En résolvant le système linéaire

$$(S) \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ à l'aide de la méthode du pivot de Gauß, on démontre que son ensemble solution est $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. On pose donc

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Fin de la construction d'une base de trigonalisation. On complète la famille libre (Y_1) de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ en une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$ en posant

$$Y_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille $\mathscr{C} := (Y_1, Y_2)$ est libre et, par cardinalité-dimension, elle forme une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$. Le choix du second vecteur de la base $\mathscr{C}$ importe peu car la dernière matrice d'une matrice triangulaire est quelconque.
• Calcul de la matrice de φ_B dans la base de trigonalisation. Comme

$$\varphi_T(Y_1) = BY_1 = 2\cdot Y_1 + 0\cdot Y_2 \quad \text{et} \quad \varphi_T(Y_2) = BY_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1\cdot Y_1 + 2\cdot Y_2$$

il vient

$$T := \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi_B) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• Application du théorème de changement de base. Par théorème de changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(\varphi_B\right) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\varphi_B\right)\ P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$$

i.e.

$$B = P\ T\ P^{-1}$$

où

$$P := P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nous observons que B est non seulement trigonalisable sur $\mathbb{C}$, mais encore trigonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q33 — Nous considérons de nouveau les objets construits en **Q32**.
Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous prouvons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$B^k = P\ T^k\ P^{-1} = P\ (2\cdot I_2 + N)^k\ P^{-1} \quad \text{où } N := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les matrices $2\cdot I_2$ et N commutent et $N^2 = 0_{\mathscr{M}_2(\mathbb{C})}$. La formule du binôme livre alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$T^k = (2\cdot I_2 + N)^k = 2^k\cdot I_2 + 2^{k-1}\cdot\binom{k}{1}\cdot N = \begin{pmatrix} 2^k & k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$B^k = P\ T^k\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & k\cdot 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^k + k\cdot 2^{k-1} & -k\cdot 2^{k-1} \\ k\cdot 2^{k-1} & 2^k - k\cdot 2^{k-1} \end{pmatrix}$$

FIN