DEVOIR SURVEILLÉ N°13

— 15 [§1] + 13 [§2] + 16 [§3] + 50 [§4] = 94 points —

Samedi 17 juin – 8h15-12h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 QUESTIONS DE COURS

Q1 — 1+2 point(s) — Donner la définition et la caractérisation de la signature.

Q2 — 3 point(s) — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée et $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on pose

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_j) = \left(x_{1,j}, x_{2,j}, \ldots, x_{n,j}\right)^{\top} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Développer $f(x_1, \ldots, x_n)$ pour aboutir à une expression sommatoire dans laquelle figurent $f(e_1, \ldots, e_n)$ et les coordonnées de $x_1, \ldots, x_n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Q3 — 1+2 point(s) — Donner la définition et la caractérisation du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.

Q4 — 1+2 point(s) — Énoncer et démontrer la caractérisation des automorphismes par le déterminant.

Q5 — 2+1 point(s) — Énoncer et démontrer le résultat sur le déterminant d'une transposée. En donner une conséquence.

§ 2 STRICTE CONVEXITÉ ET ESPÉRANCE

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Q6 — 5 point(s) — Démontrer que, pour tous réels $x_1 < x_2$, pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0, 1[^2$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$

$$f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2) < \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2)$$

Q7 — 3 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$

$$\mathscr{P}(n) \left| \begin{array}{l} \text{pour tous réels } x_1 < x_2 < \ldots < x_n \\ \text{pour tout } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in]0, 1[^n \text{ tel que } \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1 \\ f(\lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n) < \lambda_1 \cdot f(x_1) + \lambda_2 \cdot f(x_2) + \ldots + \lambda_n \cdot f(x_n) \end{array} \right.$$

Soient (Ω, P) un espace probabilisé fini et $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire.

Q8 — 2 point(s) — Démontrer

$$f(E(X)) \leqslant E(f(X))$$

La variable aléatoire X est dite « constante presque sûrement » s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(X = a) = 1$.

Q9 — 3 point(s) — Démontrer qu'il y a égalité en **Q8** si et seulement si X est constante presque sûrement.

§ 3 Groupe symétrique et projection de $\mathbb{R}^n$

Soient un nombre entier $n \geqslant 2$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Pour tout $\sigma \in S_n$, on note f_σ l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\, i \in [\![1, n]\!] \quad f_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

et $P_\sigma := \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f_\sigma)$.

Q10 — 1 point(s) — Soit $(\sigma_1, \sigma_2) \in S_n^2$. Déterminer $f_{\sigma_1} \circ f_{\sigma_2}$.

Q11 — 2 point(s) — Soit $\sigma \in S_n$. Démontrer que f_σ est un automorphisme de $\mathbb{R}^n$. Quelle est son application réciproque ?

Q12 — 1+1 point(s) — Justifier que l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} (S_n, \circ) & \longrightarrow & (\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), \times) \\ \sigma & \longmapsto & P_\sigma \end{array} \right.$$

est bien définie, puis qu'il s'agit d'un morphisme de groupes.

Q13 — 2 point(s) — Soit $\sigma \in S_n$. Que vaut le déterminant de la matrice P_σ ?

Soit

$$H := \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0 \right\}$$

Q14 — 2 point(s) — Démontrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.

Soit p l'application définie par

$$p := \frac{1}{n!} \cdot \sum_{\sigma \in S_n} f_\sigma$$

Q15 — 3 point(s) — Démontrer que p est un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

Q16 — 4 point(s) — Déterminer les éléments caractéristiques de p, i.e. son noyau et son image.

§ 4 Trigonalisabilité d'une matrice complexe

Le corps $\mathbb{C}$ étant infini, on identifie les polynômes à coefficients complexes et les fonctions polynomiales de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2.
Pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on définit la fonction χ_M par

$$\chi_M \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda \cdot I_n - M) \end{array} \right.$$

Soit $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Q17 — 1+2 point(s) — Calculer la trace et le déterminant de A.

Q18 — 3 point(s) — Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\chi_A(\lambda)$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Q19 — 3 point(s) — Démontrer que la fonction χ_M est un polynôme unitaire de degré n.

Q20 — 1 point(s) — Exprimer le coefficient de degré 0 de χ_M en fonction du déterminant de M.

Q21 — 3 point(s) — Exprimer le coefficient de degré $n-1$ de χ_M en fonction de la trace de M.

Q22 — 2 point(s) — Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice semblable à M. Démontrer que $\chi_N = \chi_M$.

Soient E *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $u \in \mathscr{L}(E)$.
On définit la fonction χ_u *par*

$$\chi_u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ \lambda & \longmapsto & \det(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - u) \end{array} \right.$$

Q23 — 2 point(s) — Justifier que χ_u est un polynôme unitaire de degré n.

Q24 — 2 point(s) — Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer

$$\chi_u(\lambda) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\exists x \in E \setminus \{0_E\} \quad u(x) = \lambda \cdot x)$$

Q25 — 3 point(s) — Démontrer qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } (\lambda, A) \in \mathbb{C} \times \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{C})$$

Q26 — 3 point(s) — Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ comme en **Q25**. Soient $F := \mathrm{Vect}(e_2, \dots, e_n)$ et i, p les applications linéaires définies par

$$i \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right. \quad \text{et} \quad p \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot e_k & \longmapsto & \sum_{k=2}^{n} x_k \cdot e_k \end{array} \right.$$

Démontrer que A est la matrice de l'endomorphisme $p \circ u \circ i$ de F dans la base $\mathscr{B}_F := (e_2, \dots, e_n)$.

Q27 — 6 point(s) — Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$\mathscr{P}(n) \left| \begin{array}{l} \text{pour tout } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } E \text{ de dimension } n \\ \text{pour tout } u \in \mathscr{L}(E) \\ \text{il existe une base } \mathscr{B} \text{ de } E \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \text{ est triangulaire supérieure} \end{array} \right.$$

Si $\mathbb{K}$ *est un corps, une matrice* M *de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *est dite trigonalisable sur* $\mathbb{K}$ *s'il existe une matrice* $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et une matrice* $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *triangulaire supérieure telle que*

$$M = P\,T\,P^{-1}$$

Q28 — 3 point(s) — Déduire de **Q27** que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$.

Q29 — 2 point(s) — Proposer une méthode pour calculer les puissances d'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en s'appuyant sur **Q28**. Peut-on toujours la mettre en œuvre pour une matrice donnée ?

Q30 — 3 point(s) — Donner une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas trigonalisable sur $\mathbb{R}$. Identifier l'étape de la démonstration du résultat de **Q28** qui vaut pour le corps $\mathbb{C}$, mais qui peut être mise en défaut pour le corps $\mathbb{R}$.

Q31 — 3 point(s) — Démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Soit $B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

Q32 — 5 point(s) — Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ et une matrice $T \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure telles que

$$B = P\,T\,P^{-1}$$

Q33 — 3 point(s) — Expliciter, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, les 4 coefficients de B^k.

FIN