Éléments d'un corrigé du Devoir Surveillé n°12

— 57 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 6 point(s) — Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$, (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X, puis démontrer les deux résultats.

Cf. C23.92

Q2 — 8 point(s) — Énoncer le lien fondamental entre la composition des applications linéaires et le produit matriciel, puis démontrer le résultat.

Cf. C24.14

§ 2 Formules de Wald

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et N une variable aléatoire définie sur le même espace, à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
On suppose que toutes les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi et que les variables $X_1, \ldots, X_n, N$ sont indépendantes.
Enfin, on définit la variable aléatoire Y sur Ω par

$$Y \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \end{array} \right.$$

Q3 — 2 point(s) — Justifier que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(Y = y, N = k) = P(X_1 + \ldots + X_k = y) \cdot P(N = k)$$

Soit $(y,k) \in Y(\Omega) \times [\![1,n]\!]$. D'une part

$$(Y = y, N = k) = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i = y, N = k \right) = \left(X_1 + \ldots + X_k = y, N = k \right)$$

et d'autre part, le lemme des coalitions assure que les variables aléatoires $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i$ et N sont indépendantes. Nous en déduisons

$$P(Y = y, N = k) = P\left(X_1 + \ldots + X_k = y, N = k\right) = P\left(X_1 + \ldots + X_k = y\right) \cdot P(N = k)$$

Q4 — 3 point(s) — Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X_1)$ et $E(N)$.

Nous appliquons la formule des probabilités totales par rapport au système complet d'événements $(N = k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ associé à N pour obtenir, à l'aide de **Q3**

$$\forall\, y \in Y(\Omega) \quad P(Y = y) = \sum_{k=1}^{n} P(Y = y, N = k) = \sum_{k=1}^{n} P\left(X_1 + \ldots + X_k = y\right) \cdot P(N = k)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
E(Y) &:= \sum_{y\in Y(\Omega)} y\cdot P(Y=y)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y\cdot P\left(X_1+\ldots+X_k=y\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot E\left(X_1+\ldots+X_k\right) \qquad [(X_1+\ldots+X_k)(\Omega)\subset Y(\Omega)]\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot k\cdot E(X_1) \qquad \left[\text{linéarité de l'espérance et } X_1,\ldots,X_n \text{ ont même loi}\right]\\
&= E(X_1)\cdot E(N)
\end{aligned}$$

Q5 — 5 point(s) — Exprimer $V(Y)$ en fonction de $E(X_1)$, $E(N)$, $V(X_1)$ et $V(N)$.

Nous calculons

$$\begin{aligned}
E\left(Y^2\right) &:= \sum_{y\in Y(\Omega)} y^2\cdot P(Y=y) \qquad [\text{formule de transfert}]\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot\left(\sum_{y\in Y(\Omega)} y^2\cdot P\left(X_1+\ldots+X_k=y\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot E\left((X_1+\ldots+X_k)^2\right) \qquad [(X_1+\ldots+X_k)(\Omega)\subset Y(\Omega) \text{ et formule de transfert}]\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k} E\left(X_i^2\right)+2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} E(X_i\cdot X_j)\right) \qquad \left[\text{linéarité de l'espérance}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot\left(\sum_{i=1}^{k} E\left(X_1^2\right)+2\cdot\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} E(X_1)^2\right) \qquad \left[X_1,\ldots,X_n \text{ indépendantes et de même loi}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(N=k)\cdot\left(k\cdot E\left(X_1^2\right)+\left(k^2-k\right)\cdot E(X_1)^2\right)\\
&= V(X_1)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k\cdot P(N=k)\right)+E(X_1)^2\cdot\sum_{k=1}^{n} k^2\cdot P(N=k) \qquad \left[\text{formule de Koenig-Huyghens}\right]\\
&= V(X_1)\cdot E(N)+E(X_1)^2\cdot E\left(N^2\right) \qquad [\text{formule de transfert}]
\end{aligned}$$

Grâce à la formule de Koenig-Huyghens et **Q4**, il vient

$$V(Y)=V(X_1)\cdot E(N)+E(X_1)^2\cdot V(N)$$

§ 3 Inégalités de Young et de Hölder

Q6 — 3 point(s) — Soient $p>0$ et $q>0$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Démontrer que

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\quad x\cdot y\leqslant\frac{1}{p}\cdot x^p+\frac{1}{q}\cdot y^q \qquad \left[\text{inégalité de Young}\right]$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$. Si $x=0$ ou $y=0$, l'inégalité est claire. Dans la suite nous supposons donc $x>0$ et $y>0$.

La fonction ln est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$ et vérifie, pour tout $t>0$, $\ln''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$. Elle est donc concave sur $\mathbb{R}_{>0}$.

Nous en déduisons

$$\ln\left(\frac{1}{p}\cdot x^p+\frac{1}{q}\cdot y^q\right)\geqslant\frac{1}{p}\cdot\ln\left(x^p\right)+\frac{1}{q}\cdot\ln\left(y^q\right)=\ln(x\cdot y)$$

Comme la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$, nous en déduisons

$$\frac{1}{p}\cdot x^p+\frac{1}{q}\cdot y^q \geqslant x\cdot y$$

Si $p\in\mathbb{R}_{>0}$ et $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on définit la norme p de x par

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Q7 — 5 point(s) — Soient $p>0$, $q>0$ tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et $n\in\mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer

$$\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \quad \forall y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n \quad \left|\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i\right| \leqslant ||x||_p\cdot ||y||_q \qquad [\text{inégalité de Hölder}]$$

Soient $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ et $y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{R}^n$. Si $x=0$ et $y=0$ alors l'inégalité est claire. Désormais, nous supposons $x\neq 0$ et $y\neq 0$, ce qui implique que $||x||_p>0$ et $||y||_q>0$.
D'après **Q6**

$$\forall i\in[\![1,n]\!] \quad \frac{|x_i|}{||x||_p}\cdot\frac{|y_i|}{||y||_q} \leqslant \frac{1}{p}\cdot\left(\frac{|x_i|}{||x||_p}\right)^p+\frac{1}{q}\cdot\left(\frac{|y_i|}{||y||_q}\right)^q$$

En sommant membre-à-membre ces n inégalités, il vient

$$\frac{1}{||x||_p\cdot||y||_q}\cdot\sum_{i=1}^n |x_i|\cdot|y_i| \leqslant \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{||x||_p^p}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{=||x||_p^p}+\frac{1}{q}\cdot\frac{1}{||y||_q^q}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^q}_{=||y||_q^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

En multipliant membre-à-membre par $||x||_p\cdot||y||_q>0$, on obtient

$$\sum_{i=1}^n |x_i|\cdot|y_i| \leqslant ||x||_p\cdot||y||_q$$

On conclut grâce à l'inégalité triangulaire qui livre

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i\cdot y_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot|y_i|$$

§ 4 Une condition suffisante de diagonalisabilité

Soient un entier $n\geqslant 2$ et $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A.
Un nombre complexe λ est appelé valeur propre de A s'il existe $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ tel que $AX=\lambda\cdot X$.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et est noté $\mathrm{Spec}(A)$.
Si $\lambda\in\mathrm{Spec}(A)$, un vecteur $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\}$ tel que $AX=\lambda\cdot X$ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Q8 — 3 point(s) — Soit $\lambda\in\mathbb{C}$. Démontrer que $\lambda\in\mathrm{Spec}(A)$ si et seulement si $\mathrm{Rg}(A-\lambda\cdot I_n)<n$.

Nous raisonnons par équivalences et notons $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\begin{array}{lll}
\lambda\in\mathrm{Spec}(A) & \Longleftrightarrow & \exists X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})\setminus\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\} \quad AX=\lambda\cdot X \\
& \Longleftrightarrow & \mathrm{Ker}(A-\lambda\cdot I_n)\neq\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\} \\
& \Longleftrightarrow & \mathrm{Ker}\left(\varphi_A-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right)\neq\{0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\} \\
& \Longleftrightarrow & \varphi_A-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ est non injectif} \\
& \Longleftrightarrow & \varphi_A-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})} \text{ est non bijectif} \qquad [\text{endomorphisme de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \text{ de dimension } n<\infty] \\
& \Longleftrightarrow & A-\lambda\cdot I_n=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\left(\varphi_A-\lambda\cdot\mathrm{id}_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right)\notin\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \\
& \Longleftrightarrow & \mathrm{Rg}(A-\lambda\cdot I_n)<n
\end{array}$$

Q9 — 5 point(s) — Soient un entier $p\geqslant 2$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de A et, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i. Démontrer que la famille $(X_1,\dots,X_p)$ est libre.

Nous raisonnons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.
• Initialisation à $p = 1$. Soit λ_1 une valeur propre de A et X_1 un vecteur propre associé. Comme X_1 est non nul, la famille (X_1) est libre.
• Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que toute famille de p vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes est libre.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de A et $X_1, \ldots, X_p, X_{p+1}$ des vecteurs propres de A respectivement associés.
Nous raisonnons par l'absurde et supposons la famille $(X_1, \ldots, X_p, X_{p+1})$ liée.
Comme la famille $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre (hypothèse de récurrence), cela implique qu'il existe des complexes $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ tels que

$$(L_1) \qquad X_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot X_i$$

En multipliant membre-à-membre par A par la gauche, il vient

$$(L_2) \qquad \lambda_{p+1} \cdot X_{p+1} = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot \lambda_i \cdot X_i$$

En effectuant l'opération $L_2 - \lambda_{p+1} \cdot L_1$, nous obtenons alors

$$0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{i+1}) \cdot X_i$$

Comme la famille $(X_1, \ldots, X_p)$ est libre, nous en déduisons

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad \alpha_i \cdot (\lambda_i - \lambda_{i+1}) = 0$$

puis

$$\forall\, i \in [\![1, p]\!] \quad \alpha_i = 0$$

car les complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_p, \lambda_{p+1}$ sont deux-à-deux distincts. Avec L_1 il vient $X_{p+1} = 0$, ce qui n'est pas puisque X_{p+1} est un vecteur propre.

Q10 — 1 point(s) — Que peut-on en déduire pour l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$?

Comme $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est de dimension finie n, toute famille libre de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est finie de cardinal inférieur ou égal à n.
D'après **Q9**, l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$ est donc fini et $\left|\mathrm{Spec}(A)\right| \leqslant n$.

Q11 — 4 point(s) — On suppose que A possède n valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, soit X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre de λ_i.
D'après **Q9**, la famille $\mathscr{C} := (X_1, \ldots, X_n)$ de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ est libre. Comme son cardinal égale la dimension finie de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\mathscr{C}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
Par définition même de chacun des vecteurs $X_1, \ldots, X_n$, il vient

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi_A) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Le théorème de changement de base pour les endormorphismes livre alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_A) = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\varphi_A) \times P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}$$

qui se réécrit

$$A = P \times \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \times P^{-1}$$

où $P := P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}}$ est inversible, comme matrice de passage entre deux bases.

Désormais, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Q12 — 4 point(s) — Déterminer $\mathrm{Spec}(A)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On calcule le rang de $A - \lambda \cdot I_3$, à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß, pour obtenir

$$\mathrm{Rg}(A - \lambda \cdot I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \left\{2, -j, -\overline{j}\right\} \\ 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après **Q8**, il vient $\mathrm{Spec}(A) = \left\{2, -j, -\overline{j}\right\}$.

Q13 — 4 point(s) — Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

- Un vecteur propre associé à la valeur propre 2. On résout le système linéaire

$$(A - 2 \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß. On obtient

$$(A - 2 \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Un vecteur propre associé à la valeur propre $-j$. On résout le système linéaire

$$(A + j \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß. On obtient

$$(A + j \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} j \\ \overline{j} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Un vecteur propre associé à la valeur propre $-\overline{j}$. On résout le système linéaire

$$(A + \overline{j} \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'inconnue $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß. On obtient

$$(A + \overline{j} \cdot I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \overline{j} \\ j \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Q14 — 2 point(s) — Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

La matrice A possède trois valeurs propres complexes $2, -j, -\overline{j}$ deux-à-deux distincts et

$$X_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_2 := \begin{pmatrix} j \\ \overline{j} \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad X_3 := \begin{pmatrix} \overline{j} \\ j \\ 1 \end{pmatrix}$$

sont des vecteurs respectivement associés. D'après **Q11**, si $\mathscr{B}$ désigne la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et $\mathscr{C} := (X_1, X_2, X_3)$, alors

$\mathscr{C}$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ et

$$A = P \times \operatorname{Diag}\left(2, -j, -\overline{j}\right) \times P^{-1} \quad \text{avec } P := P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & j & \overline{j} \\ 1 & \overline{j} & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$$

Q15 — 5 point(s) — Calculer les puissances de A.

À l'aide de **Q14**, on démontre au moyen d'un raisonnement par récurrence que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = P \times \operatorname{Diag}\left(2^k, (-j)^k, \left(-\overline{j}\right)^k\right) \times P^{-1}$$

En appliquant l'algorithme du pivot de Gauß(opérations élémentaires uniquement sur les lignes) à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & j & \overline{j} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \overline{j} & j & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

on la transforme en

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & \overline{j}/3 & j/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & j/3 & \overline{j}/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Ainsi

$$P^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{j} & j & 1 \\ j & \overline{j} & 1 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^* \quad A^k = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & j & \overline{j} \\ 1 & \overline{j} & j \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ 0 & (-j)^k & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\overline{j}\right)^k \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \overline{j} & j & 1 \\ j & \overline{j} & 1 \end{pmatrix}$$

Comme j et $\overline{j}$ sont des racines cubiques de l'unité, nous sommes incités à scinder l'étude en trois parties, suivant le reste de la division euclidienne de l'exposant k par 3, afin d'avoir une expression simplifiée.
Nous nous contentons ici de traiter le cas où $k = 3q$, où $q \in \mathbb{N}^*$. Nous obtenons, grâce aux relations

$$1 + j + j^2 = 0 \quad , \quad j^2 = \overline{j} \quad , \quad \overline{j}^2 = j$$

que

$$\forall\, q \in \mathbb{N}^* \quad A^{3q} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 8^q + 2\cdot(-1)^q & 8^q + (-1)^{q+1} & 8^q + (-1)^{q+1} \\ 8^q + (-1)^{q+1} & 8^q + 2\cdot(-1)^q & 8^q + (-1)^{q+1} \\ 8^q + (-1)^{q+1} & 8^q + (-1)^{q+1} & 8^q + 2\cdot(-1)^q \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{Z})$$