DEVOIR SURVEILLÉ N°12

Lundi 5 juin – 14h15-16h15 et 16h15-18h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$, (Ω, P) un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X, puis démontrer les deux résultats.

Q2 — Énoncer le lien fondamental entre la composition des applications linéaires et le produit matriciel, puis démontrer le résultat.

§ 2 FORMULES DE WALD

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles définies sur un espace probabilisé fini (Ω, P) et N une variable aléatoire définie sur le même espace, à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.
On suppose que toutes les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi et que les variables $X_1, \ldots, X_n, N$ sont indépendantes.
Enfin, on définit la variable aléatoire Y sur Ω par

$$Y \left| \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) \end{array} \right.$$

Q3 — Justifier que, pour tout $y \in Y(\Omega)$, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$,

$$P(Y = y, N = k) = P(X_1 + \ldots + X_k = y) \cdot P(N = k)$$

Q4 — Exprimer $E(Y)$ en fonction de $E(X_1)$ et $E(N)$.

Q5 — Exprimer $V(Y)$ en fonction de $E(X_1)$, $E(N)$, $V(X_1)$ et $V(N)$.

§ 3 INÉGALITÉS DE YOUNG ET DE HÖLDER

Q6 — Soient $p > 0$ et $q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Démontrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \quad x \cdot y \leqslant \frac{1}{p} \cdot x^p + \frac{1}{q} \cdot y^q \qquad \text{[inégalité de Young]}$$

Si $p \in \mathbb{R}_{>0}$ et $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit la norme p de x par

$$||x||_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Q7 — Soient $p > 0$, $q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Démontrer

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left| \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \right| \leqslant ||x||_p \cdot ||y||_q \qquad \text{[inégalité de Hölder]}$$

§ 4 Une condition suffisante de diagonalisabilité

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_A l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ canoniquement associé à A.
Un nombre complexe λ est appelé valeur propre de A s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$ tel que $AX = \lambda \cdot X$.
L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et est noté $\mathrm{Spec}(A)$.
Si $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \left\{0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})}\right\}$ tel que $AX = \lambda \cdot X$ est appelé vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Q8 — Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Démontrer que $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$ si et seulement si $\mathrm{Rg}(A - \lambda \cdot I_n) < n$.

Q9 — Soient un entier $p \geqslant 2$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux-à-deux distinctes de A et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, X_i un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_i. Démontrer que la famille $(X_1, \dots, X_p)$ est libre.

Q10 — Que peut-on en déduire pour l'ensemble $\mathrm{Spec}(A)$?

Q11 — On suppose que A possède n valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ deux-à-deux distinctes. Démontrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.

Désormais, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

Q12 — *Déterminer* $\mathrm{Spec}(A)$.

Q13 — *Déterminer, pour tout $\lambda \in \mathrm{Spec}(A)$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ.*

Q14 — *Donner une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $A = P \times D \times P^{-1}$.*

Q15 — *Calculer les puissances de A.*

Fin