Un corrigé du Devoir Surveillé n°11

— 36 [§1] + 38 [§2] + 26 [§3] + 38 [§4] = 138 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 4+8 point(s) — Énoncer la formule de Taylor avec reste intégrale, puis en donner une démonstration.

Cf. C21.75.

Q2 — 4+8 point(s) — Énoncer le théorème sur le produit cartésien de deux ensembles finis non vides, puis en donner une démonstration.

Cf. C22.23.

Q3 — 4+8 point(s) — Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^*\times\,]0,1[$. Énoncer le résultat du cours sur la somme de n variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathscr{B}(p)$, puis en donner une démonstration.

Cf. C23.68.

§ 2 Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue [1]

On fixe un réel $x\geqslant 0$ et on pose, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

Q4 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout entier $n\geqslant 2$

$$S_n(x)-1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant S_{n-1}(x)$$

- La fonction

$$f_x \left| \begin{array}{ccc} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^{-x} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $[1,+\infty[$. Comme, pour tout $t\geqslant 1$

$$f_x'(t) = -x\cdot t^{-x-1} \leqslant 0$$

la fonction f_x est décroissante sur $[1,+\infty[$.

- Fixons $k\in\mathbb{N}^*$. Comme, pour tout $t\in[k,k+1]$

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \frac{1}{t^x} \leqslant \frac{1}{k^x}$$

la croissance de l'intégrale livre

$$\frac{1}{(k+1)^x} = \int_k^{k+1} \frac{1}{(k+1)^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k^x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k^x}$$

- Fixons un entier $n\geqslant 2$. En sommant l'inégalité précédente entre 1 et $n-1$, il vient

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^x} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x}$$

qui se réécrit

$$S_n(x)-1 = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^x} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^x} = S_{n-1}(x)$$

1. D'après le sujet de Mathématiques 2 du Concours Mines-Ponts 2023 pour la filière MP-MPI

Q5 — 6 point(s) — En déduire que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $x>1$.

On scinde l'étude en trois parties.

- Supposons que $x \in \,]0,1[$. D'après **Q4**

$$S_n(x) \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-x}-1}{1-x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Par lemme de majoration, il vient $S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

- Supposons que $x=1$. D'après **Q4**

$$S_n(1) \geqslant \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Par lemme de majoration, il vient $S_n(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

- Supposons que $x>1$. La suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante car

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad S_{n+1}(x)-S_n(x) = \frac{1}{(n+1)^x} \geqslant 0$$

D'après **Q4**, pour tout entier $n\geqslant 2$

$$S_n(x) \leqslant 1+\int_1^{n+1} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = 1+\left[\frac{t^{1-x}}{1-x}\right]_1^{n+1} = 1+\frac{(n+1)^{1-x}-1}{1-x} \leqslant 1+\frac{1}{x-1}$$

La suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc également majorée. Par théorème de la limite monotone elle converge.

Q6 — 4 point(s) — Si $x\in]0,1]$, donner un équivalent « simple » de $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- Supposons que $x\in\,]0,1[$. Soit un entier $n\geqslant 2$. En **Q5**, nous avons déjà établi

$$(\star) \qquad S_n(x) \geqslant \frac{(n+1)^{1-x}-1}{1-x}$$

D'après **Q4**

$$(\star\star) \qquad S_n(x) \leqslant 1+\int_1^{n} \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t = 1+\frac{n^{1-x}-1}{1-x}$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons

$$1-\frac{1}{1-x}+\frac{n^{1-x}}{1-x} \geqslant S_n(x) \geqslant \frac{(n+1)^{1-x}}{1-x}-\frac{1}{1-x}$$

puis, en multipliant cette inégalité membre-à-membre par $\dfrac{1-x}{n^{1-x}} \geqslant 0$, il vient

$$\frac{1-x}{n^{1-x}}-\frac{1}{n^{1-x}}+1 \geqslant \frac{1-x}{n^{1-x}}\cdot S_n(x) \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{1-x}-\frac{1}{n^{1-x}}$$

Par théorème d'encadrement, nous en déduisons

$$\frac{1-x}{n^{1-x}}\cdot S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc

$$S_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-x}}{1-x}$$

- Supposons que $x=1$. Soit un entier $n\geqslant 2$. En **Q5**, nous avons déjà établi

$$(\star\star\star) \qquad S_n(1) \geqslant \ln(n+1)$$

D'après **Q4**

$$(\star\star\star\star) \qquad S_n(1) \leqslant 1+\int_1^{n} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = 1+\ln(n)$$

De $(\star\star\star)$ et $(\star\star\star\star)$ nous déduisons

$$1+\ln(n) \geqslant S_n(1) \geqslant \ln(n+1) = \ln\left(n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n)+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

puis, en multipliant cette inégalité membre-à-membre par $\dfrac{1}{\ln(n)} \geqslant 0$, il vient

$$\frac{1}{\ln(n)}+1 \geqslant \frac{S_n(1)}{\ln(n)} \geqslant 1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln(n)}$$

Par théorème d'encadrement, nous en déduisons

$$\frac{S_n(1)}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

donc

$$S_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$$

On pose, pour tout $x>1$

$$\zeta(x) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

On se propose que calculer $\zeta(2)$ dans la suite.

Q7 — 4 point(s) — Exhiber deux réels α et β tels que

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2+\beta t\right)\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. En intégrant par parties, nous calculons

$$\int_0^{\pi} t\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n-1}{n^2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\pi} t^2\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{(-1)^n 2\pi}{n^2}$$

Nous cherchons donc des rées α et β tels que

$$\frac{1}{n^2} = \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2+\beta t\right)\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{2\pi\alpha(-1)^n+\beta\left((-1)^n-1\right)}{n^2}$$

i.e. tels que

$$2\pi\alpha(-1)^n+\beta\left((-1)^n-1\right)=1$$

- Analyse. Si ces réels α et β existent alors, en spécialisant à n pair, il vient $\alpha=1/2\pi$ et, en spécialisant à n impair, il vient $\beta=-1$.
- Synthèse. En distinguant deux cas suivant la parité de n, nous démontrons que, si

$$\alpha=\frac{1}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad \beta=-1$$

alors

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad \int_0^{\pi} \left(\alpha t^2+\beta t\right)\cdot\cos(nt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

Q8 — 4 point(s) — Démontrer que, si $t\in\,]0,\pi]$, alors

$$\forall\, n\in\mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n}\cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) & = & \mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{ikt}\right) & \\
& = & \mathrm{Re}\left(\dfrac{1-e^{i(n+1)t}}{1-e^{it}} - 1\right) & \left[e^{it} \neq 1 \text{ car } t \not\equiv 0\ [2\pi]\right] \\
& = & \mathrm{Re}\left(\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot e^{i\frac{nt}{2}} - 1\right) & [\text{angle moitié}] \\
& = & \dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)t}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{nt}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \\
& = & \dfrac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) + \sin\left(\frac{t}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \left[\text{si } (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}\right] \\
& = & \dfrac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \dfrac{1}{2} &
\end{array}$$

Q9 — 4 point(s) — Justifier que, si φ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0,\pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_0^\pi \varphi(t) \cdot \sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad [\text{lemme de Riemann-Lebesgue}]$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction φ et la fonction $t \longmapsto -\cos(nt)/n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$. Par intégration par parties

$$\int_0^\pi \varphi(t) \cdot \sin(nt)\ \mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos(nt)\varphi(t)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \cos(nt)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{\varphi(0)}{n} + \frac{(-1)^{n+1}\varphi(\pi)}{n} + \frac{1}{n} \cdot \int_0^\pi \cos(nt)\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$$

La fonction φ' est définie et continue sur le segment $[0,\pi]$. Par le théorème des bornes atteintes, le nombre

$$||f'||_\infty := \sup_{t \in [0,\pi]} |\varphi'(t)|$$

est bien défini. En appliquant des inégalités triangulaires, il vient

$$\left|\int_0^\pi \varphi(t) \cdot \sin(nt)\ \mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|\varphi(0)| + |\varphi(\pi)| + \pi \cdot ||f'||_\infty}{n}$$

D'après le théorème d'encadrement

$$\int_0^\pi \varphi(t) \cdot \sin(nt)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Q10 — 12 point(s) — En déduire que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll}
\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cdot \cos(kt)\ \mathrm{d}t & [\mathbf{Q7}] \\
& = & \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos(kt)\ \mathrm{d}t &
\end{array}$$

D'après **Q8**, pour tout $t \in]0,\pi]$

$$\begin{aligned}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ \mathrm{d}t &= \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{t}{2}-\frac{t^2}{4\pi}+\frac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\cdot\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\end{aligned}$$

Considérons la fonction

$$\varphi\ \left|\ \begin{array}{ccc}]0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & \dfrac{\frac{t^2}{2\pi}-t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\end{array}\right.$$

Comme $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$, elle se prolonge par continuité en 0, en posant $\varphi(0)=-1$. Si on note (abusivement) φ son prolongement par continuité sur $[0,\pi]$, nous observons que

$$\forall\, t\in[0,\pi]\quad \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)\ \mathrm{d}t=\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4\pi}+\varphi(t)\cdot\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)$$

d'où

$$(\star)\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\frac{t}{2}-\frac{t^2}{4\pi}\ \mathrm{d}t+\int_0^{\pi}\varphi(t)\cdot\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ \mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{6}+\int_0^{\pi}\varphi(t)\cdot\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ \mathrm{d}t$$

La fonction φ est continue sur le segment $[0,\pi]$. Elle est en outre dérivable sur l'intervalle $]0,\pi]$ et sa dérivée sur cet intervalle ouvert en 0 est donnée par

$$\forall\, t\in]0,\pi]\quad \varphi'(t)=\frac{t\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{\cos(t)-1}-\frac{t^2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}{2\pi(\cos(t)-1)}$$

Comme $\sin(x)\underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\cos(x)-1\underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$

$$\varphi'(t)\xrightarrow[t\to 0]{} -1$$

D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0,\pi]$ et $\varphi'(0)=-1$. Les arguments utiles à la démonstration de **Q9** s'appliquent alors *mutatis mutandis* pour établir que

$$(\star\star)\qquad \int_0^{\pi}\varphi(t)\cdot\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)\ \mathrm{d}t\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi^2}{6}$$

§ 3 Formule d'inversion de Pascal et applications

Soit $(a_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, le nombre complexe b_n est défini par

$$b_n:=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot a_k$$

Q11 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$

$$a_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\cdot\binom{n}{k}\cdot b_k\qquad \text{[formule d'inversion de Pascal]}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot b_k &= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{\ell} \cdot a_\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot \ell! \cdot (k-\ell)!} \cdot a_\ell \qquad \text{[formule d'inversion pour les sommes triangulaires]} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!} \cdot a_\ell \cdot \sum_{k=\ell}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \frac{1}{(n-k)! \cdot (k-\ell)!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell!} \cdot a_\ell \cdot \sum_{k=0}^{n-\ell} (-1)^{n-k-\ell} \cdot \frac{1}{(n-k-\ell)! \cdot k!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{n!}{\ell! \cdot (n-\ell)!} \cdot a_\ell \cdot \sum_{k=0}^{n-\ell} (-1)^{n-k-\ell} \cdot \frac{(n-\ell)!}{(n-k-\ell)! \cdot k!} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \cdot a_\ell \cdot \underbrace{(-1+1)^{n-\ell}}_{\delta_{n,\ell}} \qquad \text{[formule du binôme de Newton]} \\
&= a_n
\end{aligned}$$

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \text{nombre de surjections de } [\![1,p]\!] \text{ vers } [\![1,n]\!] & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Q12 — 8+1 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot s_k$$

et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule sommatoire pour s_n.

- Nous remarquons que $s_1 = p$, $s_p = p!$ et, si $n > p$, alors $s_n = 0$.
- La formule est claire pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Observons que

$$(\star) \qquad [\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} = \bigsqcup_{k=1}^{n} \bigsqcup_{A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \underbrace{\left\{ f \in [\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]} \,:\, f([\![1,p]\!]) = A \right\}}_{E_A}$$

Soient $k \in [\![1,n]\!]$ et $A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$. Comme l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} E_A & \longrightarrow & \{ f : [\![1,p]\!] \longrightarrow A \,:\, f \text{ est surjective} \} \\ f & \longmapsto & f^{|A} \end{array} \right.$$

est bijective, $\operatorname{Card}(E_A) = s_k$. De $(\star)$, nous déduisons alors que

$$n^p = \operatorname{Card}\left([\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} s_k = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Card}(\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])) \cdot s_k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \cdot s_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot s_k \qquad [s_0 = 0]$$

- D'après **Q11**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot k^p$$

Un dérangement d'un ensemble E non vide est une permutation de E sans point fixe, i.e. une application $\sigma : E \longrightarrow E$ bijective telle que

$$\forall x \in E \quad \sigma(x) \neq x$$

Q13 — 4 point(s) — Soient E et F des ensembles non vides équipotents. Démontrer que l'ensemble des dérangements de E et l'ensemble des dérangements de F sont équipotents.

Soit $f\colon E \longrightarrow F$ une application bijective. Notons $\mathscr{D}(E)$ (resp. $\mathscr{D}(F)$) l'ensemble des dérangements de E (resp. de F).

- Introduisons l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(E) & \longrightarrow & \mathscr{D}(F) \\ \sigma & \longmapsto & f\circ\sigma\circ f^{-1} \end{array} \right.$$

Vérifions qu'elle est bien définie. Soit $\sigma \in \mathscr{D}(E)$. L'application $f\circ\sigma\circ f^{-1}\colon F \longrightarrow F$ est bijective comme composée de bijections. Supposons qu'elle ait un point fixe $y \in F$. Alors

$$f\circ\sigma\circ f^{-1}(y) = y$$

d'où

$$\sigma\left(f^{-1}(y)\right) = f^{-1}(y)$$

ce qui est impossible car σ ne possède aucun point fixe.

- De même l'application

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}(F) & \longrightarrow & \mathscr{D}(E) \\ \tau & \longmapsto & f^{-1}\circ\tau\circ f \end{array} \right.$$

est bien définie.

- On vérifie aisément que $\psi\circ\varphi = \mathrm{id}_{\mathscr{D}(E)}$ et $\varphi\circ\psi = \mathrm{id}_{\mathscr{D}(F)}$. L'application φ est donc bijective et ψ est sa réciproque.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_n := \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 0 \\ \textit{nombre de dérangements de } [\![1,n]\!] & \textit{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Q14 — 8+1 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\cdot d_k$$

et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule sommatoire pour d_n.

- La formule est claire pour $n = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\sigma \in S_n$, on pose

$$\mathrm{Fix}(\sigma) := \{k \in [\![1,n]\!] \;:\; \sigma(k) = k\} \qquad [\text{ensemble des points fixes de } \sigma]$$

Nous observons que

$$(\star) \qquad S_n = \bigsqcup_{k=0}^{n} \; \bigsqcup_{A\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} \underbrace{\{\sigma \in S_n \;:\; \mathrm{Fix}(\sigma) = A\}}_{E_A}$$

Soit $k \in [\![0,n]\!]$ et $A \in \mathscr{P}_k([\![1,n]\!])$. Posons $\mathscr{D}([\![1,n]\!]\setminus A)$ l'ensemble des dérangements de $[\![1,n]\!]\setminus A$. L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} E_A & \longrightarrow & \mathscr{D}([\![1,n]\!]\setminus A) \\ \sigma & \longmapsto & \sigma_{|[\![1,n]\!]\setminus A}^{|[\![1,n]\!]\setminus A} \end{array} \right.$$

est bien définie (l'image d'un élément $k \in [\![1,n]\!]\setminus A$ par $\sigma \in E_A$ ne peut appartenir à A sinon k serait point fixe de σ) et bijective. Sa réciproque est l'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}([\![1,n]\!]\setminus A) & \longrightarrow & E_A \\ \tau & \longmapsto & \sigma \left| \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \longrightarrow & [\![1,n]\!] \\ k & \longmapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \in A \\ \tau(k) & \text{si } k \in [\![1,n]\!]\setminus A \end{cases} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Ainsi $\mathrm{Card}\,(E_A) = d_{n-k}$. De $(\star)$, nous déduisons alors que

$$n! = \mathrm{Card}\,(S_n) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A\in\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])} d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_k([\![1,n]\!])\cdot d_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot d_{n-k} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}\cdot d_\ell \qquad [\ell \leftarrow n-k]$$

- D'après **Q11**

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad d_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}\cdot\binom{n}{k}\cdot k! = n!\cdot\sum_{\ell=0}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell!} \qquad [\ell \leftarrow n-k]$$

§ 4 Loi hypergéométrique

Nous rappelons que les coefficients binomiaux sont définis par

$$\forall\,(n,k)\in\mathbb{Z}^2\quad \binom{n}{k}=\begin{cases}\dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \textit{si } 0\leqslant k\leqslant n\\ 0 & \textit{sinon.}\end{cases}$$

Q15 — 4 point(s) — Soient a,b deux nombres entiers naturels et $n\in[\![0,a+b]\!]$. Démontrer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\cdot\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}\qquad\text{[formule de Vandermonde]}\ .$$

- Première solution (polynômes). Nous calculons

$$(X+1)^{a+b}=\sum_{\ell=0}^{a+b}\binom{a+b}{\ell}X^{\ell}$$

$$(X+1)^{a}\,(X+1)^{b}=\left(\sum_{i=0}^{a}\binom{a}{i}X^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{b}\binom{b}{j}X^{j}\right)=\sum_{\ell=0}^{a+b}\left(\sum_{k=0}^{\ell}\binom{a}{k}\binom{b}{\ell-k}\right)X^{\ell}\,.$$

En comparant les coefficients de degré n des polynômes $(X+1)^{a+b}$ et $(X+1)^{a}\,(X+1)^{b}$ qui sont égaux, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}.$$

- Deuxième solution (combinatoire).
  - Si $k>a$, alors $\binom{a}{k}=0$. Si $n-k>b$, i.e. si $k<n-b$, alors $\binom{b}{n-k}=0$. Donc

$$(\star)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\sum_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$$

  - Si E est un ensemble fini, alors pour tout $k\in[\![0,\operatorname{Card}(E)]\!]$, nous notons $\mathscr{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E à k éléments. Nous savons

$$(\star\star)\qquad \operatorname{Card}(\mathscr{P}_k(E))=\binom{\operatorname{Card}(E)}{k}.$$

  - Nous définissons l'application φ par

$$\varphi\ \left|\ \begin{array}{ccc}\displaystyle\bigcup_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)}\mathscr{P}_k([\![1,a]\!])\times\mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!]) & \longrightarrow & \mathscr{P}_n([\![1,a+b]\!])\\ (A,B) & \longmapsto & A\cup B\,.\end{array}\right.$$

    Vérifions que l'application φ est bien définie. Soit k un nombre entier tel que $\max(0,n-b)\le k\le\min(a,n)$. Alors $0\le k\le a$ et $0\le n-k\le b$. Soit $(A,B)\in\mathscr{P}_k([\![1,a]\!])\times\mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!])$. Alors

$$A\cup B\subset[\![1,a]\!]\cup[\![a+1,a+b]\!]=[\![1,a+b]\!]$$

    et, comme les ensembles $[\![1,a]\!]$ et $[\![a+1,a+b]\!]$ sont disjoints, les ensembles A et B sont également disjoints. Ainsi

$$\operatorname{Card}(A\cup B)=\operatorname{Card}(A)+\operatorname{Card}(B)=k+n-k=n\,.$$

    L'ensemble $A\cup B$ est donc une partie de $[\![1,a+b]\!]$ à n éléments. L'application φ est donc bien définie.
  - Nous définissons l'application ψ par

$$\psi\ \left|\ \begin{array}{ccc}\mathscr{P}_n([\![1,a+b]\!]) & \longrightarrow & \displaystyle\bigcup_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)}\mathscr{P}_k([\![1,a]\!])\times\mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!])\\ C & \longmapsto & (C\cap[\![1,a]\!],C\cap[\![a+1,a+b]\!])\end{array}\right.$$

Vérifions que l'application ψ est bien définie. Soit $C \in \mathscr{P}_n([\![1,a+b]\!])$. Alors $C \cap [\![1,a]\!]$ est une partie de $[\![1,a]\!]$, qui possède $\mathrm{Card}\,(A) =: k$ éléments, avec $0 \leq k \leq a$.
Comme $C \subset [\![1,a+b]\!]$

$$C = C \cap [\![1,a+b]\!] = C \cap ([\![1,a]\!] \cup [\![a+1,a+b]\!]) = (C \cap [\![1,a]\!]) \cup (C \cap [\![a+1,a+b]\!])\ .$$

De $C \cap [\![1,a]\!] \subset [\![1,a]\!]$, $C \cap [\![a+1,a+b]\!] \subset [\![a+1,a+b]\!]$ et $[\![1,a]\!] \cap [\![a+1,a+b]\!] = \emptyset$, nous déduisons que les ensembles $C \cap [\![1,a]\!]$ et $C \cap [\![a+1,a+b]\!]$ sont disjoints. Donc

$$n = \mathrm{Card}\,(C) = \mathrm{Card}\,(C \cap [\![1,a]\!]) + \mathrm{Card}\,(C \cap [\![a+1,a+b]\!]) = k + \mathrm{Card}\,(C \cap [\![a+1,a+b]\!])\ .$$

Ainsi $\mathrm{Card}\,(C \cap [\![a+1,a+b]\!]) = n-k$ et donc $0 \leq n-k \leq a+b-(a+1)+1 = b$. Donc $n-b \leq k \leq n$.
Comme $0 \leq k \leq a$ et $n-b \leq k \leq n$, on a

$$\max(0,n-b) \leq k \leq \min(a,n)\ .$$

Donc l'ensemble $C \cap [\![1,a]\!]$ est une partie de $[\![1,a]\!]$ à k éléments, $C \cap [\![a+1,a+b]\!]$ est une partie de $[\![a+1,a+b]\!]$ à $n-k$ éléments, où $\max(0,n-b) \leq k \leq \min(a,n)$. L'application ψ est donc bien définie.

— Soit $(A,B) \in \displaystyle\bigcup_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \mathscr{P}_k([\![1,a]\!]) \times \mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!])$.

$$\psi(\varphi(A,B)) = \psi(A \cup B) = ((A \cup B) \cap [\![1,a]\!]\,,\,(A \cup B) \cap [\![a+1,a+b]\!]) = (A,B)$$

la dernière égalité découlant de $A \subset [\![1,a]\!]$ et $B \subset [\![a+1,a+b]\!]$.

— Soit $C \in \mathscr{P}_n([\![1,a+b]\!])$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi(\psi(C)) & = & \varphi(C \cap [\![1,a]\!]\,,\,C \cap [\![a+1,a+b]\!]) \\ & = & (C \cap [\![1,a]\!]) \cup (C \cap [\![a+1,a+b]\!]) \\ & = & C \cap ([\![1,a]\!] \cup [\![a+1,a+b]\!]) \\ & = & C \cap [\![1,a+b]\!] \\ & = & C \end{array}$$

la dernière égalité découlant de $C \subset [\![1,a+b]\!]$.

— Nous en déduisons que l'application φ est bijective (et que ψ est son application réciproque). Ainsi

$$\mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_n([\![1,a+b]\!])) = \mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \mathscr{P}_k([\![1,a]\!]) \times \mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!])\right)$$

Comme la réunion $\displaystyle\bigcup_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \mathscr{P}_k([\![1,a]\!]) \times \mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!])$ est disjointe, il vient

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_n([\![1,a+b]\!])) & = & \displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_k([\![1,a]\!]) \times \mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!])) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_k([\![1,a]\!])) \times \mathrm{Card}\,(\mathscr{P}_{n-k}([\![a+1,a+b]\!]))\ . \end{array}$$

Grâce à $(\star)$ et $(\star\star)$, nous obtenons finalement

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{k=\max(0,n-b)}^{\min(a,n)} \binom{a}{k}\binom{b+a-(a+1)-1}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{b}{n-k}.$$

Soient N,n,m trois nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant n < N$ et $1 \leqslant m < N$. On dit qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini (Ω,P) suit la loi hypergéométrique de paramètre (N,n,m) si

$$\left\{ \begin{array}{l} X(\Omega) \subset [\![0,n]\!] \\ \forall\, k \in [\![0,n]\!] \quad P(X=k) = \dfrac{\binom{m}{k}\cdot\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \end{array} \right.$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathscr{H}(N,n,m)$.

Q16 — 2 point(s) — Justifier que $\mathscr{H}(N,n,m)$ est une loi.

D'après **Q15**

$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} = \frac{1}{\binom{N}{n}}\binom{N}{n} = 1\,.$$

Donc $\mathcal{H}(N,n,m)$ est bien une loi.

Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{H}(N,n,m)$.

Q17 — 4 point(s) — On suppose, dans cette question, que les nombres entiers naturels N,n,m vérifient $2 \leqslant n < N$ et $2 \leqslant m < N$ et on introduit $r \in \mathbb{N}^*$. Démontrer

$$\sum_{x\in X(\Omega)} x^r \cdot P(X=x) = \frac{nm}{N} \cdot \sum_{y\in Y(\Omega)} (y+1)^{r-1} \cdot P(Y=y)$$

où Y est une variable aléatoire de loi $\mathcal{H}(N-1,n-1,m-1)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X(\Omega)} x^r \cdot P(X=x) &= \sum_{k=0}^{n} k^r\, P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k^r \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k^r \binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k} \\
&= \frac{1}{\frac{N}{n}\binom{N-1}{n-1}} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1}\, m \binom{m-1}{k-1}\binom{N-m}{n-k} && \text{[formule du capitaine]} \\
&= \frac{nm}{N} \sum_{k=1}^{n} k^{r-1} \frac{\binom{m-1}{k-1}\binom{N-1-(m-1)}{n-1-(k-1)}}{\binom{N-1}{n-1}} \\
&= \frac{nm}{N} \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1)^{r-1} \frac{\binom{m-1}{\ell}\binom{N-1-(m-1)}{n-1-\ell}}{\binom{N-1}{n-1}} && [\ell \leftarrow k-1] \\
&= \frac{nm}{N} \cdot \sum_{y\in Y(\Omega)} (y+1)^{r-1} \cdot P(Y=y)
\end{aligned}$$

Q18 — 2 point(s) — En déduire la valeur de

$$\sum_{x\in X(\Omega)} x \cdot P(X=x)$$

On exprimera le résultat en fonction de n et $p := \dfrac{m}{N}$.

- Si $n=1$ alors
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) = \sum_{k=0}^{1} k \frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{1-k}}{\binom{N}{1}} = \frac{m}{N} = \frac{nm}{N} = np$$
- Si $m=1$ alors
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{\binom{1}{k}\binom{N-1}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N} = \frac{nm}{N} = np$$
- Sinon $n \geqslant 2$ et $m \geqslant 2$. Nous pouvons donc appliquer **Q17**, en spécialisant r à 1 et obtenir
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x \cdot P(X=x) = \frac{nm}{N} \cdot \sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y) = \frac{nm}{N} = np \qquad [\textbf{Q16}]$$

où Y est une variable aléatoire de loi $\mathcal{H}(N-1,n-1,m-1)$.

Q19 — 4 point(s) — Déterminer la valeur

$$\sum_{x\in X(\Omega)} x^2 \cdot P(X=x)$$

- Si $n=1$ alors
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot P(X=x)=\sum_{k=0}^{1} k^2\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{1-k}}{\binom{N}{1}}=\frac{m}{N}$$
- Si $m=1$ alors
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot P(X=x)=\sum_{k=0}^{n} k^2\frac{\binom{1}{k}\binom{N-1}{n-k}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}=\frac{n}{N}$$
- Sinon $n\geqslant 2$ et $m\geqslant 2$. Nous pouvons donc appliquer **Q17**, en spécialisant r à 2 et obtenir
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot P(X=x)=\frac{nm}{N}\cdot\sum_{y\in Y(\Omega)}(y+1)\cdot P(Y=y)$$

où Y est une variable aléatoire de loi $\mathscr{H}(N-1,n-1,m-1)$. D'après **Q16** et **Q18**
$$\sum_{x\in X(\Omega)} x^2\cdot P(X=x)=\frac{nm}{N}\cdot\left(\frac{(n-1)(m-1)}{N-1}+1\right)$$

Q20 — 4 point(s) — Soient N,n,m trois nombres entiers naturels tels que $1\leqslant n<N$ et $1\leqslant m<N$. On considère une urne contenant N boules, dont m sont blanches et $N-m$ sont rouges. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Justifier que $X\sim\mathscr{H}(N,n,m)$.

- Comme nous piochons n boules, nous ne pouvons avoir plus de n boules blanches. Ainsi $X(\Omega)\subset[\![0,n]\!]$.
- Soit $k\in[\![0,n]\!]$. Nous calculons la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches.
  — On ne peut pas avoir tiré plus de m boules blanches, donc si $k>m$, alors $P(X=k)=0$.
  — On ne peut pas avoir tiré plus de $N-m$ boules rouges, donc si $n-k>N-m$, alors $P(X=k)=0$.
  — On suppose désormais que $k\leq m$ et $n-k\leqslant N-m$, i.e. $n+m-k\leqslant k\leqslant m$. Donc
  $$\max(0,n+m-N)\leqslant k\leqslant\min(n,m)\,.$$
  Comme les tirages sont effectués dans remise et que seul compte le nombre de boules blanches obtenus, il revient au même de considérer que les n tirages ont été effectués en une seule fois, i.e. simultanément.
  Le nombre de tirages favorables est donc
  $$\underbrace{\binom{m}{k}}_{\substack{\text{nombre de tirages simultanés de}\\ k\text{ blanches parmi les }m}}\times\underbrace{\binom{N-m}{n-k}}_{\substack{\text{nombre de tirages simultanés de}\\ n-k\text{ blanches parmi les }N-m}}$$
  et le nombre de tirages possible est $\binom{N}{n}$. Comme tous les tirages sont supposés équiprobables
  $$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}\,.$$
  Grâce à la définition étendue des coefficients binomiaux, cette formule vaut en fait pour tout $k\in[\![0,n]\!]$.
  — Donc pour tout $k\in[\![0,n]\!]$
  $$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}\,.$$
  La variable aléatoire X suit donc la loi $\mathscr{H}(N,n,m)$.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Soient $(X_m)_{m\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $m\in\mathbb{N}^*$, il existe un nombre entier N_m tel que
$$1\leqslant n<N_m\qquad 1\leqslant m<N_m\qquad X_m\sim\mathscr{H}(N_m,n,m)$$
On suppose qu'il existe $p\in\,]0,1[$ tel que
$$\frac{m}{N_m}\xrightarrow[m\to+\infty]{}p$$

Q21 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$P(X_m = k) \xrightarrow[m\to+\infty]{} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

$$P(X_m = k) = \frac{\binom{m}{k}\binom{N_m-m}{n-k}}{\binom{N_m}{n}}.$$

Nous pouvons exprimer cette quantité à l'aide de factorielles seulement si

$$\min(0, n+m-N_m) \leqslant k \leqslant \min(n, m).$$

Comme $N_m \underset{m\longrightarrow+\infty}{\sim} \dfrac{m}{p}$, $N_m \xrightarrow[m\longrightarrow+\infty]{} +\infty$. Donc

$$n+m-N_m = N_m\left(\frac{n}{N_m}+\frac{n}{N_m}-1\right) \xrightarrow[m\longrightarrow+\infty]{} +\infty\,(0+p-1) = -\infty\,.$$

Ainsi, il existe un rang entier m_0 tel que, pour tout $m \geqslant m_0$

$$n+m-N_m \leqslant 0 \qquad \text{et} \qquad m \geqslant n\,.$$

Donc, pour tout $m \geqslant m_0$

$$\min(0, n+m-N_m) = 0 \qquad \text{et} \qquad \min(n, m)$$

d'où, pour tout $m \geqslant m_0$.

$$\begin{aligned}
P(X_m = k) &= \frac{n!\,(N_m-n)!}{N_m!}\,\frac{m!}{k!\,(m-k)!}\,\frac{(N_m-m)!}{(n-k)!\,(N_m-m-n+k)!}\\
&= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\underbrace{\frac{1}{N_m}\cdots\frac{1}{(N_m-(n-1))}}_{n\text{ termes}}\,\underbrace{m\ldots(m-(k-1))}_{k\text{ termes}}\,\underbrace{(N_m-m)\ldots(N_m-m-(n-k-1)))}_{n-k\text{ termes}}\\
&= \binom{n}{k}\,\underbrace{\frac{m}{N_m}\cdots\frac{(m-(k-1))}{(N_m-(k-1))}}_{k\text{ termes}}\,\underbrace{\frac{N_m-m}{N_m-k}\cdots\frac{N_m-m-(n-k-1)}{(N_m-(n-1))}}_{n-k\text{ termes}}
\end{aligned}$$

Donc, pour tout $m \geqslant m_0$

$$P(X_m = k) = \binom{n}{k}\,\underbrace{\frac{m}{N_m}\cdots\frac{\dfrac{m}{N_m}-\dfrac{k-1}{N_m}}{1-\dfrac{k-1}{N_m}}}_{k\text{ termes}}\,\underbrace{\frac{1-\dfrac{m}{N_m}}{1-\dfrac{k}{N_m}}\cdots\frac{1-\dfrac{m}{N_m}-\dfrac{n-k-1}{N_m}}{1-\dfrac{n-1}{N_m}}}_{n-k\text{ termes}}$$

Ainsi, lorsque m tends vers $+\infty$, k et n étant fixés, il vient

$$P(X_m = k) \xrightarrow[m\longrightarrow+\infty]{} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Q22 — 2 point(s) — Comment aurions-nous pu conjecturer le résultat de **Q21** grâce à la situation de reconnaissance de loi de **Q20**?

Nous considérons de nouveau la situation de reconnaissance de loi de **Q20**.
Si m tend vers $+\infty$ alors que la proportion de boules blanches dans l'urne tend vers $p \in]0,1[$, le nombre de boules dans l'urne tend vers $+\infty$, alors que la proportion de boules blanches tend à se stabiliser autour de la valeur p.
Puisque le nombre de boules tirées reste fixe, lui, nous considérons que le tirage de n boules de l'urne ne modifie que très peu la composition de l'urne, i.e. nous considérons qu'il est indifférent que les tirages soient opérés avec remise ou sans remise.
Mais dès lors X_m compte le nombre de succès dans une répétition indépendante (avec notre approximation) d'une expérience de Bernoulli, n fois. Cette expérience de Bernoulli consiste à tirer une boule de l'urne et un succès est l'obtention d'une boule blanche. Toujours en approximation, nous considérons que cette probabilité de succès vaut p (asymptotiquement du moins).

Ainsi pouvons nous intuitivement expliquer ($\neq$ démontrer) que la loi de X_m doit « être proche » de la loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, lorsque m tend vers $+\infty$.

Julien et Romain viennent d'acheter un étang. Ils voudraient connaître le nombre, noté n, de poissons dans leur étang. Pour cela, ils effectuent une première pêche. Ils ramènent ainsi $r := 133$ poissons qu'ils relâchent après les avoir marqués. Lors d'une seconde pêche de $s := 144$ poissons, ils constatent que $k := 18$ sont marqués.

Q23 — 4 point(s) — Quelle était la probabilité $P(n)$ d'avoir pêché k poissons marqués ?

La population totale de poissons est de n (valeur numérique inconnue).
Parmi ces n poissons, $r := 133$ sont marqués et donc $n-r = n-133$ sont non marqués, ce qui scinde la population de poissons totale en deux parties.
Les $s := 144$ poissons obtenus lors de la seconde pêche l'ont été en prélevant simultanément $s := 144$ poissons parmi les n de l'étang. Il y a $\binom{n}{s}$ pêches possibles.
Parmi ces pêches possibles, celles donnant $k := 18$ poissons marqués et $s-k = 126$ poissons non marqués sont au nombre de

$$\underbrace{\binom{r}{k}}_{\substack{\text{nombre de manières de prélever}\\ \text{simultanément } k \text{ poissons}\\ \text{parmi les } r \text{ marqués}}} \times \underbrace{\binom{n-r}{s-k}}_{\substack{\text{nombre de manières de prélever}\\ \text{simultanément } s-k \text{ poissons}\\ \text{parmi les } n-r \text{ non marqués}}}$$

En supposant toutes les pêches équiprobables, nous obtenons

$$P(n) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}}.$$

Afin d'estimer n, on cherche « la » valeur de n qui maximise la probabilité $P(n)$ (estimation par maximum de vraisemblance).

Q24 — 4 point(s) — Calculer $\dfrac{P(n)}{P(n-1)}$, pour tout $n > s+r-k$.

Soit $n > s+r-k$. Alors $P(n-1) > 0$ et donc le quotient $\dfrac{P(n)}{P(n-1)}$ est bien défini.

$$\frac{P(n)}{P(n-1)} = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}} \times \frac{\binom{n-1}{s}}{\binom{r}{k}\binom{n-1-r}{s-k}} = \frac{\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n-1-r}{s-k}}\,\frac{\binom{n-1}{s}}{\binom{n}{s}} = \frac{n-r}{n+k-r-s}\,\frac{n-s}{n}.$$

Donc

$$\frac{P(n)}{P(n-1)} = \frac{n^2-(s+r)n+rs}{n^2-(s+r)n+nk}.$$

Q25 — 4 point(s) — En déduire « la » valeur de n pour laquelle $P(n)$ est maximale.

Soit $n > s+r-k$. Grâce **Q24**, nous savons que

- si $nk < rs$ alors $\dfrac{P(n)}{P(n-1)} > 1$
- si $nk = rs$ alors $\dfrac{P(n)}{P(n-1)} = 1$
- si $nk > rs$ alors $\dfrac{P(n)}{P(n-1)} < 1$.

Comme, pour tout $n > s+r-k$, $P(n) > 0$, nous en déduisons

$$P(s+r-k+1) < P(s+r-k+2) < \ldots < P\left(\left\lfloor\frac{rs}{k}\right\rfloor - 1\right) \leq P\left(\left\lfloor\frac{rs}{k}\right\rfloor\right) > P\left(\left\lfloor\frac{rs}{k}\right\rfloor + 1\right) > P\left(\left\lfloor\frac{rs}{k}\right\rfloor + 2\right) > \ldots$$

« La » valeur maximale de $P(n)$ est obtenue pour $n = \left\lfloor\frac{rs}{k}\right\rfloor - 1$ et $n = \left\lfloor\frac{rs}{k}\right\rfloor$. Avec les valeurs numériques données, Julien et Romain peuvent estimer qu'ils possèdent environ 1064 poissons dans leur étang.