Devoir Surveillé n°11

— 36 [§1] + 38 [§2] + 26 [§3] + 38 [§4] = 138 points —

Lundi 22 mai – 8h15-12h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Questions de cours

Q1 — 4+8 point(s) — Énoncer la formule de Taylor avec reste intégrale, puis en donner une démonstration.

Q2 — 4+8 point(s) — Énoncer le théorème sur le produit cartésien de deux ensembles finis non vides, puis en donner une démonstration.

Q3 — 4+8 point(s) — Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$. Énoncer le résultat du cours sur la somme de n variables aléatoires indépendantes, de même loi $\mathscr{B}(p)$, puis en donner une démonstration.

§ 2 Calcul de $\zeta(2)$ à l'aide du lemme de Riemann-Lebesgue [1]

On fixe un réel $x \geqslant 0$ et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

Q4 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$S_n(x) - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t \leqslant S_{n-1}(x)$$

Q5 — 6 point(s) — En déduire que la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si $x > 1$.

Q6 — 4 point(s) — Si $x \in]0,1]$, donner un équivalent « simple » de $S_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On pose, pour tout $x > 1$

$$\zeta(x) := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^x}$$

On se propose que calculer $\zeta(2)$ dans la suite.

Q7 — 4 point(s) — Exhiber deux réels α et β tels que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \int_0^\pi \left(\alpha t^2 + \beta t\right)\cdot \cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

1. D'après le sujet de Mathématiques 2 du Concours Mines-Ponts 2023 pour la filière MP-MPI

Q8 — 4 point(s) — Démontrer que, si $t \in]0, \pi]$, alors

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{2}$$

Q9 — 4 point(s) — Justifier que, si φ est une application de classe $\mathscr{C}^1$ de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\int_0^{\pi} \varphi(t) \cdot \sin(nt)\, \mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \qquad \text{[lemme de Riemann-Lebesgue]}$$

Q10 — 12 point(s) — En déduire que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$.

§ 3 Formule d'inversion de Pascal et applications

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe b_n est défini par

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a_k$$

Q11 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot \binom{n}{k} \cdot b_k \qquad \text{[formule d'inversion de Pascal]}$$

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$s_n := \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ \text{nombre de surjections de } [\![1, p]\!] \text{ vers } [\![1, n]\!] & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Q12 — 8+1 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot s_k$$

et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule sommatoire pour s_n.

Un dérangement d'un ensemble E non vide est une permutation de E sans point fixe, i.e. une application $\sigma : E \longrightarrow E$ bijective telle que

$$\forall\, x \in E \quad \sigma(x) \neq x$$

Q13 — 4 point(s) — Soient E et F des ensembles non vides équipotents. Démontrer que l'ensemble des dérangements de E et l'ensemble des dérangements de F sont équipotents.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$d_n := \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ \text{nombre de dérangements de } [\![1, n]\!] & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$$

Q14 — 8+1 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot d_k$$

et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une formule sommatoire pour d_n.

§ 4 Loi hypergéométrique

Nous rappelons que les coefficients binomiaux sont définis par

$$\forall (n,k) \in \mathbb{Z}^2 \quad \binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \textit{si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Q15 — 4 point(s) — Soient a, b deux nombres entiers naturels et $n \in [\![0, a+b]\!]$. Démontrer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k} \cdot \binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} \qquad \text{[formule de Vandermonde]} \ .$$

Soient N, n, m trois nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant n < N$ et $1 \leqslant m < N$. On dit qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé fini (Ω, P) suit la loi hypergéométrique de paramètre (N, n, m) si

$$\begin{cases} X(\Omega) \subset [\![0, n]\!] \\ \forall\, k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \dfrac{\binom{m}{k} \cdot \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}} \end{cases}$$

Dans ce cas, on note $X \sim \mathcal{H}(N, n, m)$.

Q16 — 2 point(s) — Justifier que $\mathcal{H}(N, n, m)$ est une loi.

Soit X une variable aléatoire telle que $X \sim \mathcal{H}(N, n, m)$.

Q17 — 4 point(s) — On suppose, dans cette question, que les nombres entiers naturels N, n, m vérifient $2 \leqslant n < N$ et $2 \leqslant m < N$ et on introduit $r \in \mathbb{N}^*$. Démontrer

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x^r \cdot P(X = x) = \frac{nm}{N} \cdot \sum_{y \in Y(\Omega)} (y+1)^{r-1} \cdot P(Y = y)$$

où Y est une variable aléatoire de loi $\mathcal{H}(N-1, n-1, m-1)$.

Q18 — 2 point(s) — En déduire la valeur de

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x \cdot P(X = x)$$

On exprimera le résultat en fonction de n et $p := \dfrac{m}{N}$.

Q19 — 4 point(s) — Déterminer la valeur

$$\sum_{x \in X(\Omega)} x^2 \cdot P(X = x)$$

Q20 — 4 point(s) — Soient N, n, m trois nombres entiers naturels tels que $1 \leqslant n < N$ et $1 \leqslant m < N$. On considère une urne contenant N boules, dont m sont blanches et $N - m$ sont rouges. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne et on note X le nombre de boules blanches obtenues. Justifier que $X \sim \mathscr{H}(N, n, m)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soient $(X_m)_{m \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre entier N_m tel que

$$1 \leqslant n < N_m \qquad 1 \leqslant m < N_m \qquad X_m \sim \mathscr{H}(N_m, n, m)$$

On suppose qu'il existe $p \in]0,1[$ tel que

$$\frac{m}{N_m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} p$$

Q21 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$

$$P(X_m = k) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Q22 — 2 point(s) — Comment aurions-nous pu conjecturer le résultat de **Q21** grâce à la situation de reconnaissance de loi de **Q20**?

Julien et Romain viennent d'acheter un étang. Ils voudraient connaître le nombre, noté n, de poissons dans leur étang. Pour cela, ils effectuent une première pêche. Ils ramènent ainsi $r := 133$ poissons qu'ils relâchent après les avoir marqués. Lors d'une seconde pêche de $s := 144$ poissons, ils constatent que $k := 18$ sont marqués.

Q23 — 4 point(s) — Quelle était la probabilité $P(n)$ d'avoir pêché k poissons marqués?

Afin d'estimer n, on cherche « la » valeur de n qui maximise la probabilité $P(n)$ (estimation par maximum de vraisemblance).

Q24 — 4 point(s) — Calculer $\dfrac{P(n)}{P(n-1)}$, pour tout $n > s + r - k$.

Q25 — 4 point(s) — En déduire « la » valeur de n pour laquelle $P(n)$ est maximale.

FIN