UN CORRIGÉ DU DEVOIR SURVEILLÉ N°10

— **193 points** —

§ 1 QUESTIONS DE COURS ET EXTENSIONS

La lettre $\mathbb{K}$ désigne un corps. Tous les résultats ci-dessous pourront s'avérer utiles dans la suite du sujet, e.g. dans le problème de la partie 5.

Q1 — 4 point(s) — Énoncer le critère pour qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel soit un sous-espace vectoriel.

Cf. C18.30

Q2 — 4 point(s) — Donner la définition d'une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Cf. C18.68

Q3 — 8+4 point(s) — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que F est un espace de dimension finie vérifiant $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ et que de plus, si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Cf. C19.38

Q4 — 4+8 point(s) — Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.

Cf. C19.42

Q5 — 8 point(s) — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Démontrer

$$E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$$

• Analyse. Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $(x_0, x_1) \in \operatorname{Ker}(p) \times \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ tel que

$$(\star) \qquad x = x_0 + x_1$$

En appliquant p à chacun des membres de $(\star)$ il vient

$$p(x) = x_1 \,.$$

Ainsi, si x_0 et x_1 existent, ils sont uniques et donnés par

$$x_1 = p(x) \quad \text{et} \quad x_0 = x - p(x)$$

• Synthèse. Soient x_0 et x_1 comme en fin d'analyse.

- Clairement $x_0 + x_1 = x$.
- Comme $p^2 = p$, $p(x_0) = p(x - p(x)) = p(x) - p^2(x) = 0_E$ et donc $x_0 \in \operatorname{Ker}(p)$.
- Toujours grâce à $p^2 = p$, $p(x_1) = p^2(x) = p(x) = x_1$ et donc $x_1 \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

• Conclusion. Nous avons démontré que tout vecteur de E s'écrit d'une unique manière comme somme d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(p)$ et d'un vecteur de $\operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$. Ainsi

$$\boxed{E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)}$$

• Remarque. La décomposition obtenue n'est pas sans rappeler celle du cours

$$E = \operatorname{Ker}(p) \oplus \operatorname{Im}(p)$$

Nous aurions pu nous appuyer sur cette dernière et démontrer $\operatorname{Im}(p) = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ pour répondre à la question. Cependant cette approche semble étrange, de prime abord, puisque $\operatorname{Ker}(p)$ peut posséder plusieurs supplémentaires dans E.

Q6 — 4+8 point(s) — Énoncer et démontrer la version géométrique du théorème du rang.

Cf. C20.55

Q7 — 6 point(s) — Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Démontrer que, si E est un espace de dimension finie, alors F est un espace de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Cf. C20.56

Q8 — 6 point(s) — Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que, si E est un espace de dimension finie, alors f est de rang fini et

$$\dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rg}(f) = \dim(E) \qquad [\text{formule du rang}]$$

Cf. C20.57

Q9 — 6 point(s) — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est bijective.
2. f est injective.
3. f est surjective.

Ce résultat est connu sous le nom de *critère d'automorphie pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie.*

- $\boxed{1 \Longrightarrow 2}$ Clair.

- $\boxed{2 \Longrightarrow 3}$ Supposons que f est injective. Alors $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$ et la formule du rang livre $\dim(\operatorname{Im}(f)) = \dim(E)$. Comme $\operatorname{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E, nous en déduisons $\operatorname{Im}(f) = E$, i.e. f est surjective.

- $\boxed{3 \Longrightarrow 1}$ Supposons que f est surjective et démontrons que f est injective, ce qui livrera sa bijectivité. Comme f est surjective, $\operatorname{Im}(f) = E$ et donc $\operatorname{rg}(f) = \dim(E)$. D'après la formule du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 0$ et donc $\operatorname{Ker}(f) = \{0_E\}$. L'application f est injective.

§ 2 Supplémentaires d'un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et projection

Dans $\mathbb{R}^4$, *soient*

$$u = (2,1,1,1) \quad , \quad v = (1,-1,2,1) \quad , \quad w = (1,3,-1,2)$$

Q10 — 2 point(s) — Démontrer que la famille (u, v, w) est libre.

Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\alpha \cdot u + \beta \cdot v + \gamma \cdot w = (0,0,0)$, i.e. tel que

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & 0 \\ \alpha & - & \beta & + & 3\gamma & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & 0 \\ \alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous résolvons (S) à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß.

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} & & 3\beta & - & 5\gamma & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \boxed{\alpha} & - & \beta & + & 3\gamma & = & 0 & \\ & & 3\beta & - & 4\gamma & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & & 2\beta & - & \gamma & = & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcll} & - & 7\beta & & & = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4 \\ \boxed{\alpha} & + & 5\beta & & & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4 \\ & - & 5\beta & & & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4 \\ & & 2\beta & - & \boxed{\gamma} & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcl}
 & - & \boxed{7\beta} & = & 0 \\
\boxed{\alpha} & & & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + (5/7)\cdot L_1 \\
 & & 0 & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - (5/7)\cdot L_1 \\
 & & \boxed{\gamma} & = & 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 + (2/7)\cdot L_1
\end{array}\right.$$

Ainsi $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et

$$\boxed{\text{la famille } (u, v, w) \text{ est libre}}$$

Q11 — 4 point(s) — Donner une équation cartésienne de $F := \mathrm{Vect}\,(u, v, w)$.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Alors $(x, y, z, t) \in F$ si et seulement si le système

$$(S) \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl}
2\alpha & + & \beta & + & \gamma & = & x \\
\alpha & - & \beta & + & 3\gamma & = & y \\
\alpha & + & 2\beta & - & \gamma & = & z \\
\alpha & + & \beta & + & 2\gamma & = & t
\end{array}\right.$$

d'inconnue $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ possède une solution. Nous appliquons l'algorithme du pivot de Gaußpour déterminer une CNS d'existence de solution pour (S).

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
 & & 3\beta & - & 5\gamma & = & x - 2y & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\
\boxed{\alpha} & - & \beta & + & 3\gamma & = & y & \\
 & & 3\beta & - & 4\gamma & = & -y + z & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
 & & 2\beta & - & \gamma & = & -y + t & L_4 \leftarrow L_4 - L_2
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
 & - & 7\beta & & & = & x + 3y - 5t & L_1 \leftarrow L_1 - 5L_4 \\
\boxed{\alpha} & + & 5\beta & & & = & -2y + 3t & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_4 \\
 & - & 5\beta & & & = & 3y + z - 4t & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_4 \\
 & & 2\beta & - & \boxed{\gamma} & = & -y + t &
\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcll}
 & - & \boxed{7\beta} & & & = & x + 3y - 5t & \\
\boxed{\alpha} & & & & & = & (5/7)\,x + (1/7)\cdot y - (6/7)\,t & L_2 \leftarrow L_2 + (5/7)\cdot L_1 \\
 & & & & 0 & = & (-5/7)\,x + (6/7)\,y + z - (3/7)\,t & L_3 \leftarrow L_3 - (5/7)\cdot L_1 \\
 & & & & \boxed{\gamma} & = & (2/7)\,x - (1/7)\,y - (3/7)\,t & L_4 \leftarrow L_4 + (2/7)\cdot L_1
\end{array}\right.$$

Nous en déduisons que le système (S) possède une solution si et seulement si

$$-\frac{5}{7}x + \frac{6}{7}y + z - \frac{3}{7}t = 0$$

Ainsi

$$\boxed{5x - 6y - 7z + 3t = 0 \text{ est une équation cartésienne de } F.}$$

Q12 — 3 point(s) — Soit $e_4 := (0, 0, 0, 1)$. Démontrer que, pour tous réels r, s, t

$$\mathrm{Vect}\,(e_4 + r\cdot u + s\cdot v + t\cdot w)$$

est un supplémentaire de F.

Soient des réels r, s, t.

- Commençons par démontrer que $e_4 + r\cdot u + s\cdot v + t\cdot w \notin F$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $e_4 + r\cdot u + s\cdot v + t\cdot w \in F$. Comme $r\cdot u + s\cdot v + t \in F$, nous en déduisons que $e_4 \in F$. Or les coordonnées de e_4 ne satisfont pas l'équation cartésienne de F obtenue en **Q11**. Contradiction.

- La famille (u, v, w) est libre (**Q10**). Comme $e_4 + r\cdot u + s\cdot v + t\cdot w \notin F = \mathrm{Vect}\,(u, v, w)$, nous en déduisons que la famille

$$(u, v, w, e_4 + r\cdot u + s\cdot v + t)$$

est libre. Comme elle possède $4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$ éléments, elle forme une base de $\mathbb{R}^4$. D'après le cours, on en déduit

$$\boxed{\text{Vect}\,(e_4 + r \cdot u + s \cdot v + t \cdot w) \text{ est un supplémentaire de } F.}$$

Q13 — 4 point(s) — Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Décomposer x sur F et $\text{Vect}\,(e_4)$.

D'après **Q12**, $\mathbb{R}^4 = F \oplus \text{Vect}\,(e_4)$. Ainsi il existe un unique $y = (a, b, c, d) \in F$ et un unique $z \in \text{Vect}\,(e_4)$ tels que

$$(\star) \quad x = y + z\,.$$

Comme $z \in \text{Vect}\,(e_4)$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$(\star\star) \quad z = (0, 0, 0, \lambda)$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$ nous déduisons

$$y = (a, b, c, d) = (x_1, x_2, x_3, x_4 - \lambda)\,.$$

Comme $y \in F$, nous savons d'après **Q11** que

$$0 = 5a - 6b - 7c + 3d = 0 = 5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 3x_4 - 3\lambda$$

Ainsi $\lambda = \dfrac{5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 3x_4}{3}$. Nous en déduisons

$$\boxed{x = \underbrace{\left(x_1, x_2, x_3, \frac{-5x_1 + 6x_2 + 7x_3}{3}\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(0, 0, 0, \frac{5x_1 - 6x_2 - 7x_3 + 3x_4}{3}\right)}_{\in \text{Vect}(e_4)}}$$

Q14 — 2 point(s) — Soit p la projection de $\mathbb{R}^4$ sur F parallèlement à $\text{Vect}\,(e_4)$. Calculer $p(x)$, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

D'après **Q13**

$$\boxed{p(x) = \left(x_1, x_2, x_3, \frac{-5x_1 + 6x_2 + 7x_3}{3}\right)}$$

§ 3 Supplémentaires d'un plan de $\mathbb{R}^4$ et symétrie

Soient le système

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Q15 — 2 point(s) — Donner une base $\mathscr{B}$ de l'ensemble solution de (S), noté F.

Nous appliquons l'algorithme du pivot de Gauß pour résoudre (S).

$$(S) \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \boxed{x_1} & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} \boxed{x_1} & & & + & (2/3)\,x_3 & - & (1/3)\,x_4 & = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - (1/3)\,L_2 \\ & & \boxed{3x_2} & + & x_3 & + & 4x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi

$$F = \left\{ \left(-\frac{2}{3} \cdot x_3 + \frac{1}{3} \cdot x_4, -\frac{1}{3} \cdot x_3 - \frac{4}{3} \cdot x_4, x_3, x_4 \right) \,:\, (x_3, x_4) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}\,(u, v)$$

où

$$u := (2, 1, -3, 0) \quad \text{et} \quad v := (1, -4, 0, 3)$$

La famille (u, v) est donc génératrice de F. Comme les vecteurs u et v ne sont pas colinéaires, elle est en outre libre. Ainsi

$$\boxed{\text{la famille } (u := (2, 1, -3, 0), v := (1, -4, 0, 3)) \text{ est une base de } F.}$$

Q16 — 4 point(s) — Compléter $\mathscr{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

- Nous démontrons que la famille (u, v, e_3, e_4) est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \cdot u + b \cdot v + c \cdot e_3 + d \cdot e_4 = 0$, i.e. tel que

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a & + & b & & & & & = & 0 \\ a & - & 4b & & & & & = & 0 \\ -3a & & & + & c & & & = & 0 \\ & & 3b & & & + & d & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous résolvons (S) à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcl} & 9b & & & & & = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \boxed{a} & -\ 4b & & & & & = & 0 \\ & -\ 12b & + & c & & & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ & 3b & & & + & d & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcll} & \boxed{9b} & & & = & 0 & \\ \boxed{a} & & & & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + (4/9)\,L_1 \\ & & c & & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + (4/3)\,L_1 \\ & & & d & = & -(1/3)\,x_1 + (2/3)\,x_2 + x_4 & L_4 \leftarrow L_4 - (1/3)\,L_1 \end{array}\right.$$

Nous en déduisons $a = b = c = d = 0$. La famille

$$(u, v, e_3, e_4)$$

est libre. Comme elle possède $4 = \dim\left(\mathbb{R}^4\right)$ éléments

$$\boxed{(u, v, e_3, e_4) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.}$$

Q17 — 2 point(s) — Soient $e_3 := (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 := (0, 0, 0, 1)$. Justifier que $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Comme (u, v) est une base de F (**Q15**), **Q16** et le cours nous livrent que

$$\boxed{\mathrm{Vect}(e_3, e_4) \text{ est un supplémentaire de } F.}$$

Q18 — 4 point(s) — Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Décomposer x sur F et $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.

- Nous calculons les coordonnées (a, b, c, d) de x dans la base (u, v, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$ (**Q16**). Pour ce faire, résolvons le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2a & + & b & & & & & = & x_1 \\ a & - & 4b & & & & & = & x_2 \\ -3a & & & + & c & & & = & x_3 \\ & & 3b & & & + & d & = & x_4 \end{array}\right.$$

d'inconnue $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauß.

$$(S) \iff \left\{\begin{array}{rrcrcrcll} & 9b & & & & & = & x_1 - 2x_2 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ \boxed{a} & -\ 4b & & & & & = & x_2 & \\ & -\ 12b & + & c & & & = & x_3 + 3x_2 & L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \\ & 3b & & & + & d & = & x_4 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrrcll} & \boxed{9b} & & & = & x_1 - 2x_2 & \\ \boxed{a} & & & & = & (4/9)\,x_1 + (1/9)\,x_2 & L_2 \leftarrow L_2 + (4/9)\,L_1 \\ & & c & & = & (4/3)\,x_1 + (1/3)\,x_2 + x_3 & L_3 \leftarrow L_3 + (4/3)\,L_1 \\ & & & d & = & -(1/3)\,x_1 + (2/3)\,x_2 + x_4 & L_4 \leftarrow L_4 - (1/3)\,L_1 \end{array}\right.$$

Ainsi

$$x = \underbrace{\left(\frac{4}{9} \cdot x_1 + \frac{1}{9} \cdot x_2\right) \cdot u + \left(\frac{1}{9} \cdot x_1 - \frac{2}{9} \cdot x_2\right) \cdot v}_{\in F} + \underbrace{\left(\frac{4}{3} \cdot x_1 + \frac{1}{3} \cdot x_2 + x_3\right) \cdot e_3 + \left(-\frac{1}{3} \cdot x_1 + \frac{2}{3} \cdot x_2 + x_4\right) \cdot e_4}_{\in \mathrm{Vect}(e_3, e_4)}$$

La décomposition cherchée est donc $x = \underbrace{\left(x_1, x_2, -\frac{4}{3}\cdot x_1 - \frac{1}{3}\cdot x_2, \frac{1}{3}\cdot x_1 - \frac{2}{3}\cdot x_2\right)}_{\in F} + \underbrace{\left(0, 0, \frac{4}{3}\cdot x_1 + \frac{1}{3}\cdot x_2 + x_3, -\frac{1}{3}\cdot x_1 + \frac{2}{3}\cdot x_2 + x_4\right)}_{\in \mathrm{Vect}(e_3, e_4)}$

Q19 — 2 point(s) — Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^4$ par rapport à F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. Calculer $s(x)$, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

D'après **Q18**

$$\begin{aligned} s(x) &= \left(x_1, x_2, -\frac{4}{3}\cdot x_1 - \frac{1}{3}\cdot x_2, \frac{1}{3}\cdot x_1 - \frac{2}{3}\cdot x_2\right) - \left(0, 0, \frac{4}{3}\cdot x_1 + \frac{1}{3}\cdot x_2 + x_3, -\frac{1}{3}\cdot x_1 + \frac{2}{3}\cdot x_2 + x_4\right) \\ &= \left(x_1, x_2, -\frac{8}{3}\cdot x_1 - \frac{2}{3}\cdot x_2 - x_3, \frac{2}{3}\cdot x_1 - \frac{4}{3}\cdot x_2 - x_4\right) \end{aligned}$$

§ 4 Matrice de Vandermonde et liberté d'une famille de fonctions

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array} \right.$$

On se propose de démontrer que, pour la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est libre.

Q20 — 1+4 point(s) — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \dots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \dots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \qquad \text{[matrice de Vandermonde]}$$

Démontrer que la matrice V est inversible si et seulement si les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts.

Nous rappelons qu'une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est trivial.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Nous raisonnons par contraposée. Supposons que deux scalaires parmi $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont égaux. Alors il existe $(i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$ et $\alpha_i = \alpha_j$. Considérons le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf ceux des lignes i et j, qui valent respectivement 1 et -1. Alors

$$VX = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_i \\ \alpha_i^2 \\ \vdots \\ \alpha_i^n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_j \\ \alpha_j^2 \\ \vdots \\ \alpha_j^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le noyau de V contient le vecteur colonne X qui n'est pas nul. La matrice V n'est donc pas inversible Notons que notre argument s'applique plus généralement à une matrice possédant deux colonnes identiques.

$\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons que les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts. Démontrons que la matrice V est inversible, ou plutôt que sa transposée $V^\top$ l'est, ce qui est équivalent.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)^\top \in \mathrm{Ker}\left(V^\top\right)$. Alors

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \alpha_0^k & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \alpha_1^k & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \alpha_n^k & = & 0 \end{array} \right.$$

Le polynôme $P := \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot X^k$ de degré inférieur ou égal à n possède donc $n+1$ racines (les scalaires deux-à-deux distincts $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$). Par suite $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ et donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

D'après ce qui précède, le noyau de $V^\top$ est trivial donc $V^\top$ est inversible.

Q21 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(f_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$(L_0) \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot f_k = 0\,.$$

Notons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie

$$f_k(0) = 1 \quad \text{et} \quad f_k'' = -k^2 \cdot f_k$$

Soit alors $p \in \mathbb{N}$. En dérivant $2p$ fois chacun des membres de (L_0), en évaluant en 0 il vient

$$(-1)^p \cdot \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot k^{2p} = 0\,.$$

puis

$$\left(L_p\right) \quad \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \cdot \left(k^2\right)^p = 0$$

En rassemblant les lignes $(L_0), (L_1), \ldots, (L_n)$ il vient

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} \lambda_0 & + & \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \ldots & + & \lambda_n & = & 0 & (L_0) \\ \lambda_0 \cdot 0^2 & + & \lambda_1 \cdot 1^2 & + & \lambda_2 \cdot 2^2 & + & \ldots & + & \lambda_n \cdot n^2 & = & 0 & (L_1) \\ \lambda_0 \cdot 0^4 & + & \lambda_1 \cdot 1^4 & + & \lambda_2 \cdot 2^4 & + & \ldots & + & \lambda_n \cdot n^4 & = & 0 & (L_2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ldots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda_0 \cdot 0^{2n} & + & \lambda_1 \cdot 1^{2n} & + & \lambda_2 \cdot 2^{2n} & + & \ldots & + & \lambda_n \cdot n^{2n} & = & 0 & (L_n) \end{array}\right.$$

Ainsi $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)^\top$ est dans le noyau de la matrice

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix}$$

où $\alpha_0 = 0^2, \alpha_1 = 1^2, \alpha_2 = 2^2, \ldots, \alpha_n = n^2$ sont deux-à-deux distincts. D'après **Q20**, V est inversible donc

$$\boxed{\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0.}$$

Q22 — 3 point(s) — En déduire que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $\underline{\lambda} := (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ tel que

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \cdot f_n = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{supp}\left(\underline{\lambda}\right) \neq \emptyset$$

Comme $\operatorname{supp}\left(\underline{\lambda}\right)$ est une partie non vide et finie de $\mathbb{N}$, elle possède un maximum que nous notons N. Ainsi

$$\operatorname{supp}\left(\underline{\lambda}\right) \subset [\![0, N]\!]$$

et

$$0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda_n \cdot f_n := \sum_{n \in \operatorname{supp}(\underline{\lambda})} \lambda_n \cdot f_n = \sum_{k=0}^{N} \lambda_k \cdot f_k$$

D'après **Q21**, la famille $\left(f_0, f_1, \ldots, f_N\right)$ est libre. Donc

$$\forall\, k \in [\![0, N]\!] \quad \lambda_k = 0$$

ce qui implique

$$\forall\, k \in \mathrm{supp}\left(\underline{\lambda}\right) \quad \lambda_k = 0 \qquad \text{[contradiction]}$$

Q23 — 2 point(s) — Justifier que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.

Raisonnons de nouveau par l'absurde et supposons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est de dimension finie n. La famille $\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right)$ est libre (**Q21**). D'après le cours

$$n+1 = \mathrm{Card}\left(\left(f_0, f_1, \dots, f_n\right)\right) \leqslant \dim\left(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\right) = n \qquad \text{[contradiction]}$$

§ 5 Suite des noyaux itérés/images itérées et lemme de Fitting

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on note $K_p := \mathrm{Ker}\left(u^p\right)$ et $I_p := \mathrm{Im}\left(u^p\right)$ où u^p est l'endomorphisme de E défini par

$$u^p := \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } p = 0 \\ \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{p \text{ fois}} & \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}$$

Nous nous proposons d'étudier la suite des noyaux itérés $\left(K_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$. Dans une première partie, nous établissons des propriétés de monotonie pour ces deux suites et un critère pour qu'elles stationnent. Dans un deuxième temps, nous supposons que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie. Nous démontrons alors que les deux suites stationnent à un même rang r et que $E = K_r \oplus I_r$ (lemme de Fitting). Dans une dernière partie, nous étudions deux exemples en dimension infinie et démontrons que $E = K_r \oplus I_r$ sous l'hypothèse que la suite des noyaux itérés et la suite des images itérées stationnent toutes deux au rang r.

§ 5.1 Généralités sur la suite des noyaux itérés/images itérées

On rappelle qu'une partie F de E est stable par u si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$. Si tel est le cas, l'endomorphisme u de E induit l'endomorphisme de F suivant

$$u_{|F}^{|F} \left|\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}\right.$$

Q24 — 1+1 point(s) — Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels K_p et I_p de E sont stables par u.

• Soit $x \in K_p$. Nous calculons $u^p(u(x)) = u^{p+1}(x) = u\left(u^p(x)\right) = u\left(0_E\right) = 0_E$. Ainsi $u(x) \in K_p$. Ceci étant établi pour un élément x quelconque de K_p, nous en déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } x \in K_p,\ u(x) \in K_p.}$

• Soit $y \in I_p$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Nous calculons $u(y) = u\left(u^p(x)\right) = u^{p+1}(x) = u^p(u(x))$. Comme $u(y)$ est l'image de $u(x)$ par l'application u^p, $u(y) \in I_p$. Ceci étant établi pour un élément y quelconque de I_p, nous en déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } y \in I_p,\ u(y) \in I_p.}$

Q25 — 1 point(s) — Démontrer que la suite des noyaux itérés $\left(K_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion).

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $x \in K_p$. Nous calculons $u^{p+1}(x) = u\left(u^p(x)\right) = u\left(0_E\right) = 0_E$. Ainsi $x \in K_{p+1}$. Ceci étant établi pour un élément x quelconque de K_p, nous en déduisons $\boxed{K_p \subset K_{p+1}.}$

Q26 — 3 point(s) — On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $K_q = K_{q+1}$.

Nous démontrons la propriété par récurrence sur l'entier $q \geqslant p$.

• Initialisation à $q = p$. Il s'agit précisément de l'hypothèse de cette question.

• Hérédité. Soit un entier $q \geqslant p$ tel que $K_q = K_{q+1}$. Démontrons $K_{q+1} = K_{q+2}$. L'inclusion $\subset$ est déjà connue, puisque la suite des noyaux itérés est croissante. Il ne reste que l'inclusion $\supset$ à établir.
Soit $x \in K_{q+2}$. Alors $u^{q+1}(u(x)) = u^{q+2}(x) = 0_E$. Ainsi $u(x) \in K_{q+1} = K_q$ (hypothèse de récurrence) et donc $u^q(u(x)) = 0_E$, soit $u^{q+1}(x) = 0_E$. Le vecteur x appartient donc à K_{q+1}. Ceci étant établi pour un élément x quelconque de K_{q+2}, nous en déduisons $K_{q+2} \subset K_{q+1}$.

• Conclusion. D'après l'initialisation au rang p, l'hérédité et l'axiome de récurrence

$$\boxed{\text{pour tout entier } q \geqslant p,\ K_q = K_{q+1}}$$

De cette étude, nous déduisons que, pour tout entier $q \geqslant p$, $K_q = K_p$.

Q27 — 1 point(s) — Démontrer que la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion).

Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $y \in I_{p+1}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x)$. Nous observons que $y = u^p(u(x))$. Comme y est l'image du vecteur $u(x)$ de E par l'application u^p, $y \in I_p$. Ceci étant établi pour un élément y quelconque de I_{p+1}, nous en déduisons $\boxed{I_{p+1} \subset I_p.}$

Q28 — 3 point(s) — On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_p = I_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $I_q = I_{q+1}$.

Nous démontrons la propriété par récurrence sur l'entier $q \geqslant p$.

• Initialisation à $q = p$. Il s'agit précisément de l'hypothèse de cette question.

• Hérédité. Soit un entier $q \geqslant p$ tel que $I_q = I_{q+1}$. Démontrons $I_{q+1} = I_{q+2}$. L'inclusion $\supset$ est déjà connue, puisque la suite des images itérées est décroissante. Il ne reste que l'inclusion $\subset$ à établir.
Soit $y \in I_{q+1}$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^{q+1}(x) = u\left(u^q(x)\right)$. Comme $u^q(x) \in I_q = I_{q+1}$ (hypothèse de récurrence), il existe $x' \in E$ tel que $u^q(x) = u^{q+1}(x')$. On en déduit que

$$y = u\left(u^q(x)\right) = u\left(u^{q+1}(x')\right) = u^{q+2}(x') .$$

Le vecteur y appartient donc à I_{q+2}. Ceci étant établi pour un élément y quelconque de I_{q+1}, nous en déduisons $I_{q+1} \subset I_{q+2}$.

• Conclusion. D'après l'initialisation au rang p, l'hérérité et l'axiome de récurrence,

$$\boxed{\text{pour tout entier } q \geqslant p,\ I_q = I_{q+1}}$$

De cette étude, nous déduisons que, pour tout entier $q \geqslant p$, $I_q = I_p$.

§ 5.2 Cas où le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie

Dans toute cette partie, nous supposons que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

Q29 — 4 point(s) — Démontrer que la suite des noyaux itérés $\left(K_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir d'un rang $r \in [\![0,n]\!]$. Cet entier r est appelé *indice de u*.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, K_p est un sous-espace vectoriel de E, donc $\dim\left(K_p\right) \in [\![0,n]\!]$. Comme la suite des noyaux itérées est croissante

$$\dim(K_0) \leqslant \dim(K_1) \leqslant \ldots \leqslant \dim(K_n) \leqslant \dim(K_{n+1}) .$$

Si toutes ces inégalités étaient strictes, alors l'ensemble $[\![0,n]\!]$ contiendrait $n+2$ éléments, ce qui n'est pas possible (principe des tiroirs). Ainsi la partie

$$A := \left\{p \in [\![0,n]\!] \ :\ \dim\left(K_p\right) = \dim\left(K_{p+1}\right)\right\}$$

de $\mathbb{N}$ est non vide. Elle admet donc un minimum (bon ordre). En posant $r := \min(A)$, nous obtenons donc

$$\dim(K_0) < \dim(K_1) < \ldots < \dim(K_{r-1}) < \dim(K_r) = \dim(K_{r+1}) .$$

Comme la suite des noyaux itérés est croissante, nous en déduisons

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{r-1} \subsetneq K_r = K_{r+1} .$$

Nous savons alors que, pour tout $p \geqslant r$, $K_p = K_{p+1}$. Nous avons donc démontré que

$$\boxed{\exists r \in [\![0,n]\!] \quad K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{r-1} \subsetneq K_r = K_{r+1} = \ldots = K_n = \ldots}$$

Q30 — 3 point(s) — Démontrer que la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir du même rang r.

Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après le théorème du rang, $\dim\left(I_p\right) = \dim(E) - \dim\left(K_p\right)$. Nous rappelons

$$\dim(K_0) < \dim(K_1) < \ldots < \dim(K_{r-1}) < \dim(K_r) = \dim(K_{r+1})$$

et nous en déduisons

$$\dim(I_0) > \dim(I_1) > \ldots > \dim(I_{r-1}) > \dim(I_r) = \dim(I_{r+1}) \; .$$

Comme la suite des images itérées est décroissante

$$I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_{r-1} \supsetneq I_r = I_{r+1} \; .$$

Nous savons alors que, pour tout $p \geqslant r$, $I_p = I_{p+1}$. Nous avons donc démontré que

$$\boxed{I_0 \supsetneq I_1 \supsetneq \ldots \supsetneq I_{r-1} \supsetneq I_r = I_{r+1} = \ldots = I_n = \ldots}$$

Q31 — 2 point(s) — On suppose que l'endomorphisme u est un automorphisme. Déterminer l'indice de u.

Comme u est un automorphisme de E, pour tout $p \in \mathbb{N}$, u^p est également un automorphisme de E et donc $K_p = \{0_E\}$. Ainsi, la suite des noyaux itérés est constante et tous ses termes valent $\{0_E\}$.

$\boxed{\text{L'indice de } u \text{ est donc } 0.}$

Q32 — 3 point(s) — On suppose que l'endomorphisme u est un projecteur distinct de id_E. Déterminer l'indice de u.

Comme u est un projecteur, $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. Si $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, alors $E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ et $u = \mathrm{id}_E$, ce qui n'est pas. Donc

$$K_0 := \mathrm{Ker}\left(u^0\right) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u) =: K_1 \; .$$

De $u^2 = u$, nous déduisons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout $p \geqslant 1$, $u^p = u$ et donc $K_p = K_1$. Ainsi

$$K_0 \subsetneq K_1 = K_2 = \ldots = K_n = \ldots$$

et donc

$\boxed{\text{l'indice de } u \text{ est } 1.}$

Q33 — 4 point(s) — On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent, i.e. qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $\nu \in \mathbb{N}^*$ son nilindice, caractérisé par $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^\nu = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Démontrer que $\nu = r$ (et donc $\nu \leqslant n$).

Comme $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^\nu = 0_{\mathscr{L}(E)}$, $K_{\nu-1} \neq E = K_\nu$. Comme la suite des noyaux itérés est croissante

$$K_{\nu-1} \subsetneq K_\nu \; .$$

Comme la suite des noyaux itérés est strictement croissante puis stationnaire, nous en déduisons

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{\nu-2} \subsetneq K_{\nu-1} \subsetneq K_\nu \; .$$

Soit $p \geqslant \nu$. Comme la suite des noyaux itérés est une suite croissante de sous-espaces vectoriels de E

$$E = K_\nu \subset K_p \subset E$$

donc $K_p = E = K_\nu$. Ainsi

$$K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \ldots \subsetneq K_{\nu-2} \subsetneq K_{\nu-1} \subsetneq K_\nu = K_{\nu+1} = \ldots = K_n = \ldots$$

et $\boxed{\text{l'indice } r \text{ de } u \text{ égale } \nu.}$

Q34 — 6 point(s) — Démontrer que $E = K_r \oplus I_r$. Ce résultat est connu sous le nom de *Lemme de Fitting*[1].

1. Hans Fitting, mathématicien allemand, 1906-1938

• Soit $y \in K_r \cap I_r$. Alors $u^r(y) = 0_E$ et il existe $x \in E$ tel que $y = u^r(x)$. Nous en déduisons

$$u^{2r}(x) = u^r\left(u^r(x)\right) = u^r(y) = 0_E$$

et donc $x \in K_{2r}$. Comme la suite des noyaux itérés stationne à partir du rang r et comme $2r \geqslant r$, $K_{2r} = K_r$ et donc $x \in K_r$. Nous en déduisons $y = u^r(x) = 0_E$. Ceci étant établi pour un élément quelconque de $K_r \cap I_r$, nous en déduisons $K_r \cap I_r \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant claire, $K_r \cap I_r = \{0_E\}$. Les sous-espaces vectoriels K_r et I_r sont donc en somme directe.

• D'après le théorème du rang, $\dim(K_r) + \dim(I_r) = \dim(E)$.

• Des deux points précédents, nous déduisons $\boxed{E = K_r \oplus I_r.}$

Q35 — 4+4 point(s) — *On suppose ici que l'endomorphisme u de E n'est ni nilpotent, ni injectif et on considère les deux endomorphismes induits par u*

$$u_{|K_r}^{|K_r} \left| \begin{array}{ccc} K_r & \longrightarrow & K_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad u_{|I_r}^{|I_r} \left| \begin{array}{ccc} I_r & \longrightarrow & I_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. .$$

Justifier $\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$ et $\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$, puis démontrer que $u_{|K_r}^{|K_r}$ est nilpotent de nilindice r et que $u_{|I_r}^{|I_r}$ est un automorphisme.

• Comme u n'est pas injectif, $K_1 \neq \{0_E\}$ et donc $K_r \neq \{0_E\}$ (la suite des noyaux itérés est croissante). Comme u n'est pas nilpotent, $u^r \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et donc $K_r \neq E$. Ainsi

$$\boxed{\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E.}$$

Nous en déduisons : $1 \leqslant \dim(K_r) \leqslant n-1$. Par le théorème du rang, $\dim(I_r) = \dim(E) - \dim(K_r) = n - \dim(K_r)$. Ainsi $1 \leqslant \dim(I_r) \leqslant n-1$ et donc

$$\boxed{\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E.}$$

• Soit $x \in \mathbb{K}_r$. Nous calculons

$$\left(u_{|K_r}^{|K_r}\right)^r(x) = u^r(x) = 0_E.$$

Donc $u_{|K_r}^{|K_r}$ est nilpotent de nilindice inférieur ou égal à r.

• Démontrons $\left(u_{|K_r}^{|K_r}\right)^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(()K_r)}$ en raisonnant par l'absurde. Supposons donc que $\left(u_{|K_r}^{|K_r}\right)^{r-1} = 0_{\mathscr{L}(()K_r)}$. Alors pour tout $x \in K_r$

$$0_E = \left(u_{|K_r}^{|K_r}\right)^{r-1}(x) = u^{r-1}(x)$$

et donc $x \in K_{r-1}$. Ceci étant établi pour un vecteur x quelconque de K_r, nous en déduisons $K_r \subset K_{r-1}$. Comme la suite des noyaux itérés est croissante, $K_{r-1} \subset K_r$ et donc $K_{r-1} = K_r$, ce qui contredit $K_{r-1} \subsetneq K_r$. Ainsi $\left(u_{|K_r}^{|K_r}\right)^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(()K_r)}$.

• Des deux points précédents, nous déduisons que

$$\boxed{\text{l'endomorphisme } u_{|K_r}^{|K_r} \text{ de } K_r \text{ est nilpotent de nilindice } r.}$$

• Soit $x \in \mathrm{Ker}\left(u_{|I_r}^{|I_r}\right)$. Alors $x \in I_r$ et $x \in K_r$ car

$$0_E = u_{|I_r}^{|I_r}(x) = u^r(x)\,.$$

Comme $x \in K_r \cap I_r$ et comme les sous-espaces vectoriels K_r et I_r sont en somme directe (**Q34**), $x = 0_E$. Ceci étant établi pour un vecteur x quelconque de $\mathrm{Ker}\left(u_{|I_r}^{|I_r}\right)$, nous en déduisons $\mathrm{Ker}\left(u_{|I_r}^{|I_r}\right) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant claire, il vient $\mathrm{Ker}\left(u_{|I_r}^{|I_r}\right) = \{0_E\}$. L'endomorphisme $u_{|I_r}^{|I_r}$ de l'espace vectoriel I_r de dimension finie est donc injectif. Par critère d'isomorphie en dimension finie, nous savons que

$$\boxed{u_{|I_r}^{|I_r} \text{ est un automorphisme de } I_r.}$$

Q36 — 6 point(s) — *On suppose que u n'est pas un automorphisme de E. Démontrer*

$$r = \min\left(\left\{p \in \mathbb{N}^* \ : \ E = \mathrm{Ker}\left(u^p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(u^p\right)\right\}\right)$$

Nous posons $A := \left\{p \in \mathbb{N}^* \ : \ E = \mathrm{Ker}\left(u^p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(u^p\right)\right\}$.

• Comme u n'est pas automorphisme de E et comme E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, l'application u n'est pas injective. Ainsi

$$K_0 = \{0_E\} \subsetneq \mathrm{Ker}(u) = K_1 \,.$$

Nous en déduisons que r n'est pas nul et donc $r \in \mathbb{N}^*$. Avec **Q34**, nous obtenons $r \in A$.

• L'ensemble A étant une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, il possède un minimum (bon ordre) et donc $\min(A)$ est bien défini. De plus $\min(A) \leqslant r$.

• Nous posons $p := \min(A)$. Soit $y \in I_p$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Comme $E = K_p + I_p$, il existe $k_p \in K_p$ et $i_p \in I_p$ tels que $x = k_p + i_p$. Comme $i_p \in I_p$, il existe $x' \in E$ tel que $i_p = u^p\left(x'\right)$. Nous calculons

$$y = u^p(x) = u^p\left(k_p + i_p\right) = u^p\left(k_p + u^p\left(x'\right)\right) = u^p\left(k_p\right) + u^{2p}\left(x'\right) = u^{2p}\left(x'\right) \,.$$

Donc $y \in I_{2p}$. Comme $p \in \mathbb{N}^*$, $2p \geqslant p+1$. La suite des images itérées étant décroissante, $I_{2p} \subset I_{p+1}$ et donc $u \in I_{p+1}$. Ceci étant établi pour tout vecteur y de I_p, nous en déduisons $I_p \subset I_{p+1}$. Comme la suite des images itérées est décroissante, $I_{p+1} \subset I_p$. Ainsi $I_p = I_{p+1}$. D'après **Q28**

$$I_p = I_{p+1} = \ldots = I_n = \ldots$$

D'après **Q30**, $r \leqslant p = \min(A)$.

• Des deux points précédents, nous déduisons

$$\boxed{r = \min(A) = \left(\left\{p \in \mathbb{N}^* \ : \ E = \mathrm{Ker}\left(u^p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(u^p\right)\right\}\right).}$$

Q37 — 12 point(s) — *Démontrer que la suite $\left(\dim\left(K_p\right)\right)_{p \in \mathbb{N}}$ croit de moins en moins vite, i.e. que pour tout $p \in \mathbb{N}$*

$$\dim\left(K_{p+2}\right) - \dim\left(K_{p+1}\right) \leqslant \dim\left(K_{p+1}\right) - \dim\left(K_p\right) \,.$$

Indication. Soit $p \in \mathbb{N}$. On pourra introduire un supplémentaire A_p de K_p dans K_{p+1}, un supplémentaire A_{p+1} de K_{p+1} dans K_{p+2} et construire une application linéaire injective de A_{p+1} dans A_p.

• Nous introduisons un supplémentaire A_p de K_p dans K_{p+1} et un supplémentaire A_{p+1} de K_{p+1} dans K_{p+2}. Ainsi

$$K_{p+1} = K_p \oplus A_p \qquad \text{et} \qquad K_{p+2} = K_{p+1} \oplus A_{p+1} \,.$$

Nous considérons l'injection canonique ι de A_{p+1} dans K_{p+2}

$$\iota \left| \begin{array}{ccc} A_{p+1} & \longrightarrow & K_{p+2} = K_{p+1} \oplus A_{p+1} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$$

et la projection π de K_{p+1} sur A_p parallèlement à K_p

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} K_{p+1} = K_p \oplus A_p & \longrightarrow & A_p \\ \underbrace{k_p}_{\in K_p} + \underbrace{a_p}_{\in A_p} & \longmapsto & a_p \end{array} \right.$$

dont le noyau est K_p.

• Soit $x \in K_{p+2}$. Comme

$$u^{p+1}\left(u(x)\right) = u^{p+2}(x) = 0_E$$

le vecteur $u(x)$ appartient à K_{p+1}. Donc l'application

$$u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \left| \begin{array}{ccc} K_{p+2} & \longrightarrow & K_{p+1} \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

est bien définie.

• L'application

$$\pi \circ u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \circ \iota \left| \begin{array}{ccc} A_{p+1} & \longrightarrow & A_p \\ x & \longmapsto & \pi(u(\iota(x))) \end{array} \right.$$

est linéaire, comme composée d'application linéaire. Soit $x \in \operatorname{Ker}\left(\pi \circ u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \circ \iota\right)$.

$$\begin{array}{rcll} \pi(u(\iota(x))) & \Longrightarrow & u(\iota(x)) \in K_p & [\operatorname{Ker}(\pi) = K_p] \\ & \Longrightarrow & u^{p+1}(\iota(x)) = u^p\left(u(\iota(x))\right) = 0_E & \\ & \Longrightarrow & \iota(x) \in K_{p+1} & \end{array}$$

Or, par définition de ι, $\iota(x) \in A_{p+1}$. Comme $K_{p+1} \cap A_{p+1} = \{0_E\}$, il vient $\iota(x) = 0_E$. Comme ι est linéaire et injective, nous en déduisons $x = 0_E$. Ceci étant établi pour un vecteur x quelconque de $\operatorname{Ker}\left(\pi \circ u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \circ \iota\right)$, nous obtenons $\operatorname{Ker}\left(\pi \circ u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \circ \iota\right) \subset \{0_E\}$. L'autre inclusion étant claire, il vient $\operatorname{Ker}\left(\pi \circ u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \circ \iota\right) = \{0_E\}$. L'application $\pi \circ u_{|K_{p+2}}^{|K_{p+1}} \circ \iota$ est donc injective. Comme les espaces vectoriels A_{p+1} et A_p sont de dimension finie

$$\dim\left(A_{p+1}\right) \leqslant \dim\left(A_p\right).$$

D'après la formule de Grassmann

$$\dim\left(A_{p+1}\right) = \dim\left(K_{p+2}\right) - \dim\left(K_{p+1}\right) \qquad \text{et} \qquad \dim\left(A_p\right) = \dim\left(K_{p+1}\right) - \dim\left(K_p\right).$$

Nous pouvons donc conclure

$$\boxed{\dim\left(K_{p+2}\right) - \dim\left(K_{p+1}\right) \leqslant \dim\left(K_{p+1}\right) - \dim\left(K_p\right).}$$

§ 5.3 Cas où le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est quelconque

Q38 — 6 point(s) — *On considère le cas où $E := \mathbb{K}[X]$ et u est l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$*

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} k \cdot [P]_k \cdot X^{k-1}. \end{array} \right.$$

La suite $\left(K_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ des noyaux itérées stationne-t-elle ?

Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous démontrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$u^p \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!} a_k X^{k-p}. \end{array} \right.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. De l'expression de u^p ci-dessous, nous déduisons

$$\begin{array}{rcl} P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k X^k \in K_p & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{k=p}^{+\infty} \frac{k!}{(k-p)!} [P]_k X^{k-p} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \displaystyle\sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{(\ell+p)!}{\ell!} [P]_{\ell+p} X^{\ell} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall \ell \in \mathbb{N} \quad [P]_{\ell+p} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \forall k \geqslant p \quad [P]_k = 0 \\ & \Longleftrightarrow & P \in \mathbb{K}_{p-1}[X]. \end{array}$$

Donc $K_p = \mathbb{K}_{p-1}[X]$. La suite

$$K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \ldots \subset K_n \subset \ldots$$

se réécrit donc

$$\left\{0_{\mathbb{K}[X]}\right\} \subsetneq \mathbb{K}_0[X] \subsetneq \mathbb{K}_1[X] \subsetneq \mathbb{K}_2[X] \subsetneq \ldots \subsetneq \mathbb{K}_{n-1}[X] \subsetneq \ldots$$

Ainsi $\boxed{\text{la suite des noyaux itérés de l'opérateur de dérivation sur } \mathbb{K}[X] \text{ ne stationne pas.}}$

Q39 — 4+4 point(s) — *On considère le cas où $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et u est l'endomorphisme de E défini par*

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \longmapsto & (0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite $\left(K_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ des noyaux itérés stationne, mais que la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ ne stationne pas.

• L'application u est clairement injective. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'application linéaire u^p est injective et donc $K_p = \{0_E\}$. Nous pouvons donc conclure que

$$\boxed{\text{la suite des noyaux itérés est constante et tous ses termes valent } \{0_E\}.}$$

• Au moyen d'un raisonnement par récurrence, nous établissons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \longmapsto & \left(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p \text{ zéros}}, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \right) \end{array} \right. .$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. De l'expression de u^p ci-dessous, nous déduisons que I_p est l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbb{K}$ dont les termes d'indices $k \in [\![0, p-1]\!]$ sont nuls, i.e.

$$I_p = \left\{ (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \; : \; b_0 = b_1 = \ldots = b_{p-1} = 0 \right\} .$$

Ainsi

$$\underbrace{I_0}_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \supsetneq \underbrace{I_1}_{\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : b_0 = 0\}} \supsetneq \underbrace{I_2}_{\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : b_0 = b_1 = 0\}} \supsetneq \underbrace{I_3}_{\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : b_0 = b_1 = b_2 = 0\}} \supsetneq \underbrace{I_4}_{\{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 0\}} \supsetneq \ldots$$

Nous en déduisons que $\boxed{\text{la suite des images itérées ne stationne pas.}}$

Q40 — 8 point(s) — *Nous considérons désormais la situation suivante.*

- *Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est quelconque (non nécessairement de dimension finie donc).*
- *Il existe un rang $r \in \mathbb{N}$ tel que $K_r = K_{r+1}$ et $I_r = I_{r+1}$.*

Démontrer que, sous ces hypothèses, $K_r \oplus I_r = E$.
Indication. Pour montrer que tout vecteur de E s'exprime comme somme d'un vecteur de K_r et d'un vecteur de I_r, on pourra s'inspirer de la décomposition d'un vecteur dans la somme directe induite par la donnée d'un projecteur.

• Soit $x \in K_r \cap I_r$. Alors $u^r(x) = 0$ et il existe $x' \in E$ tel que $x = u^r\left(x'\right)$. Nous en déduisons

$$u^{2r}\left(x'\right) = u^r\left(u^r\left(x'\right)\right) = u^r(x) = 0_E .$$

Donc $x' \in K_{2r} = K_r$ (Question 3). Ainsi $x = u^r\left(x'\right) = 0_E$.

• Soit $x \in E$. Comme $u^r(x) \in I_r = I_{2r}$ (Question 5). Donc il existe $x' \in E$ tel que $u^r(x) = u^{2r}\left(x'\right)$. Nous calculons

$$u^r\left(x - u^r\left(x'\right)\right) = u^r(x) - u^{2r}\left(x'\right) = 0_E$$

et nous en déduisons que le vecteur $x - u^r\left(x'\right)$ appartient à K_r. Comme

$$x = \underbrace{x - u^r\left(x'\right)}_{\in K_r} + \underbrace{u^r\left(x'\right)}_{\in I_r}$$

il vient $x \in K_r \oplus I_r$. Ceci étant établi pour un élément x quelconque de E, nous en déduisons $E \subset K_r \oplus I_r$. L'autre inclusion étant claire, nous pouvons conclure à $\boxed{E = K_r \oplus I_r.}$