Devoir Surveillé n°10

Samedi 1er avril – 8h15-12h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Questions de cours et extensions

La lettre $\mathbb{K}$ désigne un corps. Tous les résultats ci-dessous pourront s'avérer utiles dans la suite du sujet, e.g. dans le problème de la partie 5.

Q1 — Énoncer le critère pour qu'une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel soit un sous-espace vectoriel.

Q2 — Donner la définition d'une famille libre de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Q3 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Démontrer que F est un espace de dimension finie vérifiant $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ et que de plus, si $\dim(F) = \dim(E)$, alors $F = E$.

Q4 — Énoncer et démontrer la formule de Grassmann.

Q5 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Démontrer

$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}\left(p - \mathrm{id}_E\right)$$

Q6 — Énoncer et démontrer la version géométrique du théorème du rang.

Q7 — Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$ un isomorphisme. Démontrer que, si E est un espace de dimension finie, alors F est un espace de dimension finie et $\dim(E) = \dim(F)$.

Q8 — Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Démontrer que, si E est un espace de dimension finie, alors f est de rang fini et

$$\dim \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{rg}(f) = \dim(E) \qquad [\text{formule du rang}]$$

Q9 — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est bijective.
2. f est injective.
3. f est surjective.

Ce résultat est connu sous le nom de *critère d'automorphie pour un endomorphisme d'un espace de dimension finie.*

§ 2 Supplémentaires d'un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ et projection

Dans $\mathbb{R}^4$, soient

$$u = (2,1,1,1) \quad , \quad v = (1,-1,2,1) \quad , \quad w = (1,3,-1,2)$$

Q10 — Démontrer que la famille (u, v, w) est libre.

Q11 — Donner une équation cartésienne de $F := \mathrm{Vect}(u, v, w)$.

Q12 — Soit $e_4 := (0,0,0,1)$. Démontrer que, pour tous réels r, s, t

$$\mathrm{Vect}(e_4 + r \cdot u + s \cdot v + t \cdot w)$$

est un supplémentaire de F.

Q13 — Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Décomposer x sur F et $\mathrm{Vect}(e_4)$.

Q14 — Soit p la projection de $\mathbb{R}^4$ sur F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_4)$. Calculer $p(x)$, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

§ 3 Supplémentaires d'un plan de $\mathbb{R}^4$ et symétrie

Soient le système

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array} \right.$$

d'inconnue $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

Q15 — Donner une base $\mathscr{B}$ de l'ensemble solution de (S), noté F.

Q16 — Compléter $\mathscr{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

Q17 — Soient $e_3 := (0,0,1,0)$ et $e_4 := (0,0,0,1)$. Justifier que $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Q18 — Soit $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Décomposer x sur F et $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$.

Q19 — Soit s la symétrie de $\mathbb{R}^4$ par rapport à F parallèlement à $\mathrm{Vect}(e_3, e_4)$. Calculer $s(x)$, pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$.

§ 4 Matrice de Vandermonde et liberté d'une famille de fonctions

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_k \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos(kx) \end{array} \right.$$

On se propose de démontrer que, pour la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est libre.

Q20 — Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \\ \alpha_0^2 & \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \ldots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \alpha_0^n & \alpha_1^n & \alpha_2^n & \ldots & \alpha_n^n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R}) \qquad \text{[matrice de Vandermonde]}$$

Démontrer que la matrice V est inversible si et seulement si les scalaires $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont deux-à-deux distincts.

Q21 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\left(f_k\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.

Q22 — En déduire que la famille $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.

Q23 — Justifier que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ n'est pas de dimension finie.

§ 5 Suite des noyaux itérés/images itérées et lemme de Fitting

Soient $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u un endomorphisme de E. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, on note $K_p := \mathrm{Ker}\,(u^p)$ et $I_p := \mathrm{Im}\,(u^p)$ où u^p est l'endomorphisme de E défini par

$$u^p := \begin{cases} \mathrm{id}_E & \text{si } p = 0 \\ \underbrace{u \circ u \circ \ldots \circ u}_{p \text{ fois}} & \text{si } p \geqslant 1 \end{cases}$$

Nous nous proposons d'étudier la suite des noyaux itérés $\left(K_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ et la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$. Dans une première partie, nous établissons des propriétés de monotonie pour ces deux suites et un critère pour qu'elles stationnent. Dans un deuxième temps, nous supposons que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie. Nous démontrons alors que les deux suites stationnent à un même rang r et que $E = K_r \oplus I_r$ (lemme de Fitting). Dans une dernière partie, nous étudions deux exemples en dimension infinie et démontrons que $E = K_r \oplus I_r$ sous l'hypothèse que la suite des noyaux itérés et la suite des images itérées stationnent toutes deux au rang r.

§ 5.1 Généralités sur la suite des noyaux itérés/images itérées

On rappelle qu'une partie F de E est stable par u si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$. Si tel est le cas, l'endomorphisme u de E induit l'endomorphisme de F suivant

$$u_{|F}^{|F} \left| \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right.$$

Q24 — Soit $p \in \mathbb{N}$. Démontrer que les sous-espaces vectoriels K_p et I_p de E sont stables par u.

Q25 — Démontrer que la suite des noyaux itérés $\left(K_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante (au sens de l'inclusion).

Q26 — On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $K_p = K_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $K_q = K_{q+1}$.

Q27 — Démontrer que la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante (au sens de l'inclusion).

Q28 — On suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $I_p = I_{p+1}$. Démontrer que, pour tout entier $q \geqslant p$, $I_q = I_{q+1}$.

§ 5.2 Cas où le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie

Dans toute cette partie, nous supposons que le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie $n \geqslant 1$.

Q29 — Démontrer que la suite des noyaux itérés $\left(K_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir d'un rang $r \in [\![0, n]\!]$. Cet entier r est appelé *indice de u*.

Q30 — Démontrer que la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante (au sens de l'inclusion), puis stationnaire à partir du même rang r.

Q31 — On suppose que l'endomorphisme u est un automorphisme. Déterminer l'indice de u.

Q32 — On suppose que l'endomorphisme u est un projecteur distinct de id_E. Déterminer l'indice de u.

Q33 — On suppose que l'endomorphisme u est nilpotent, i.e. qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$. On note $\nu \in \mathbb{N}^*$ son nilindice, caractérisé par $u^{\nu-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ et $u^\nu = 0_{\mathscr{L}(E)}$. Démontrer que $\nu = r$ (et donc $\nu \leqslant n$).

Q34 — Démontrer que $E = K_r \oplus I_r$. Ce résultat est connu sous le nom de *Lemme de Fitting*[1].

Q35 — *On suppose ici que l'endomorphisme u de E n'est ni nilpotent, ni injectif et on considère les deux endomorphismes induits par u*

$$u_{|K_r}^{|K_r} \left| \begin{array}{ccc} K_r & \longrightarrow & K_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad u_{|I_r}^{|I_r} \left| \begin{array}{ccc} I_r & \longrightarrow & I_r \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array} \right. .$$

Justifier $\{0_E\} \subsetneq K_r \subsetneq E$ et $\{0_E\} \subsetneq I_r \subsetneq E$, puis démontrer que $u_{|K_r}^{|K_r}$ est nilpotent de nilindice r et que $u_{|I_r}^{|I_r}$ est un automorphisme.

Q36 — *On suppose que u n'est pas un automorphisme de E. Démontrer*

$$r = \min\left(\left\{p \in \mathbb{N}^* \ : \ E = \mathrm{Ker}\left(u^p\right) \oplus \mathrm{Im}\left(u^p\right)\right\}\right)$$

Q37 — *Démontrer que la suite $\left(\dim\left(K_p\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ croit de moins en moins vite, i.e. que pour tout $p \in \mathbb{N}$*

$$\dim\left(K_{p+2}\right) - \dim\left(K_{p+1}\right) \leqslant \dim\left(K_{p+1}\right) - \dim\left(K_p\right) .$$

Indication. Soit $p \in \mathbb{N}$. On pourra introduire un supplémentaire A_p de K_p dans K_{p+1}, un supplémentaire A_{p+1} de K_{p+1} dans K_{p+2} et construire une application linéaire injective de A_{p+1} dans A_p.

§ 5.3 Cas où le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est quelconque

Q38 — *On considère le cas où $E := \mathbb{K}[X]$ et u est l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{K}[X]$*

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} k \cdot [P]_k \cdot X^{k-1} \end{array} \right. .$$

La suite $\left(K_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ des noyaux itérées stationne-t-elle ?

Q39 — *On considère le cas où $E := \mathbb{K}^\mathbb{N}$ et u est l'endomorphisme de E défini par*

$$u \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{K}^\mathbb{N} \\ (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) & \longmapsto & (0, a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \end{array} \right.$$

Démontrer que la suite $\left(K_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ des noyaux itérés stationne, mais que la suite des images itérées $\left(I_p\right)_{p\in\mathbb{N}}$ ne stationne pas.

Q40 — *Nous considérons désormais la situation suivante.*

- *Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est quelconque (non nécessairement de dimension finie donc).*
- *Il existe un rang $r \in \mathbb{N}$ tel que $K_r = K_{r+1}$ et $I_r = I_{r+1}$.*

Démontrer que, sous ces hypothèses, $K_r \oplus I_r = E$.
Indication. Pour montrer que tout vecteur de E s'exprime comme somme d'un vecteur de K_r et d'un vecteur de I_r, on pourra s'inspirer de la décomposition d'un vecteur dans la somme directe induite par la donnée d'un projecteur.

1. Hans Fitting, mathématicien allemand, 1906-1938