Un corrigé du Devoir Surveillé n°9

— 153 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 4+8 point(s) — Énoncer le résultat sur la primitivation d'un développement limité, puis le démontrer.

> Cf. C17.50

Q2 — 4+8 point(s) — Énoncer la formule de Taylor-Young, puis la démontrer.

> Cf. C17.54

Q3 — 2 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de la fonction ch.

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$$

Q4 — 4 point(s) — Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

$$\sqrt{1+x} \underset{x \to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128} \cdot x^4 + \mathrm{o}\left(x^4\right)$$

§ 2 Étude locale d'une fonction (DB)

Q5 — 2 point(s) — Déterminer un réel $\delta > 0$ tel que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-\delta, 0[\cup]0, \delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right) \end{array} \right.$$

est définie.

> - Si $x \in]0, \pi[$, $x > 0$ et $\sin(x) > 0$ donc $\dfrac{x}{\sin(x)} > 0$.
> - Si $x \in]-\pi, 0[$, $x < 0$ et $\sin(x) < 0$, donc $\dfrac{x}{\sin(x)} > 0$.
>
> Des deux points précédents, nous déduisons que $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$.

Q6 — 2 point(s) — Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0.

> - Comme la fonction sin est dérivable en 0 avec nombre dérivé $\cos(0) = 1$, $\dfrac{\sin((x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
> - Par opération sur les limites et continuité de la fonction ln en 1, $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ (limite finie).
>
> La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = 0$.

Nous noterons (abusivement) encore f le prolongement par continuité de f à l'intervalle $]-\delta, \delta[$.

Q7 — 6 point(s) — Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

Grâce au $\mathrm{DL}_5(0)$ de la fonction sin, nous calculons

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & -\ln\left(\dfrac{\sin(x)}{x}\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & -\ln\left(1-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \end{array}$$

Comme $-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ nous pouvons effectuer une composition par la droite du $\mathrm{DL}_4(0)$ de $x\longmapsto \ln(1+x)$ pour obtenir

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \underset{x\to 0}{=} & -\left(\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}\right)-\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}\right)^2+\dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}\right)^3-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}\right)^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & -\left(-\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{120}-\dfrac{x^4}{72}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ & = & \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{x^4}{180}+\mathrm{o}\left(x^4\right) \end{array}$$

Remarque. Ce résultat obtenu est en accord avec la parité de la fonction f.

Q8 — 4 point(s) — On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Quelles propriétés de la fonction f et de la courbe $\mathscr{C}$ peut-on déduire de **Q7** ?

- La fonction f possède un $\mathrm{DL}_4(0)$ donc un $\mathrm{DL}_1(0)$ (troncature). Ce dernier est donné par

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\mathrm{o}(x)$$

Nous en déduisons que la fonction f est dérivable en 0, $f'(0)=0$ et l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}_0$ au point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est $y=0$ (tangente horizontale).

- Du $\mathrm{DL}_4(0)$ de f, nous déduisons le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f (troncature)

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}\frac{x^2}{6}+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$

Ainsi

$$f(x)-f(0)=f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{x^2}{6}\geqslant 0$$

Donc il existe un réel $\alpha>0$, que l'on peut supposer strictement inférieur à π, tel que, pour tout $x\in V$, $f(x)\geqslant f(0)=0$. La fonction f atteint donc un minimum local au point 0 et, au-dessus de V, la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de la droite $\mathscr{T}_0$.

§ 3 DL de tangente et d'arctangente à l'ordre 6 en 0 (DB)

Q9 — 1 point(s) — Justifier que la fonction tan possède un $\mathrm{DL}_6(0)$.

La fonction tan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young, elle possède un $\mathrm{DL}_n(0)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Q10 — 4 point(s) — Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction tan.

D'après le cours

$$\tan(x)\underset{x\to 0}{=}x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)$$

Nous en déduisons

$$\begin{array}{rcl} \tan^2(x) & \underset{x\to 0}{=} & \left(x+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\cdot\left(x+\dfrac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right) \\ & \underset{x\to 0}{=} & x^2+\dfrac{2}{3}\cdot x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right) \end{array}$$

puis

$$\tan'(x)=1+\tan^2(x)\underset{x\to 0}{=}1+x^2+\frac{2}{3}\cdot x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$

Par primitivation d'un DL, comme $\tan(0) = 0$

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}\cdot x^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Q11 — Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction $f : x \longmapsto \tan\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}\right)$.

- Comme $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, nous pouvons composer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction tan trouvé précédemment

$$(\star) \quad \tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 + \frac{2}{15}\cdot\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

- D'après le cours

$$\mathrm{Arctan}(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Comme $\mathrm{Arctan}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, nous pouvons composer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction tan trouvé précédemment

$$(\star\star) \quad x = \tan(\arctan(x)) \underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^3 + \frac{2}{15}\cdot\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)^5 + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons

$$\tan\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^6\right)$$

Remarque. Ce résultat peut être obtenu par un calcul de composée de DL par force brute.

§ 4 Une équation polynomiale[1] (Christophe Devulder)

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$$

Q12 — 2 point(s) — Montrer que si a est racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

Si a est racine de P alors $P(a) = 0$. Avac $(*)$, on a alors

$$P((a+1)^2-1) = P(a)P(a+2) = 0 \ \text{ et } \ P((a-1)^2-1) = P(a-2)P(a) = 0$$

et $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont racines de P.

Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

Q13 — 3 point(s) — Vérifier que lorsque a_0 est une racine, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.

On a $a_{n+1} = (a_n+1)^2-1$ et si a_n est racine de P, la question précédente montre qu'il en est de même pour a_{n+1}. Comme on suppose que c'est le cas pour a_0, un processus récurrent immédiat indique que tous les a_n sont racines de P.

Q14 — 3 point(s) — Montrer que lorsque a_0 est un réel strictement positif la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels positifs.

1. Extrait de l'épreuve du concours E3A de 2011 en filière PSI

On a a_{n+1} qui est >0 quand a_n l'est. Quand $a_0>0$, un processus récurrent immédiat indique que tous les a_n sont >0. On a alors $a_{n+1}-a_n=a_n^2+a_n>0$ et la suite (a_n) croît strictement.

Q15 — 2 point(s) — En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

Si P admet une racine $a_0>0$ alors on obtient une infinité de racines distinctes pour P (les a_n) ce qui contredit la non nullité du polynôme P (un polynôme non nul n'admet qu'un nombre fini de racines).

Q16 — 2 point(s) — Montrer que -1 n'est pas racine de P.

Si -1 est racine de P alors $(-1-1)^2-1=3$ l'est aussi ce qui contrdit la question précédente. On a donc $P(-1)\neq 0$.

Q17 — 3 point(s) — Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n+1=(a_0+1)^{2^n}$.

On prouve le résultat par récurrence sur n. Il est vrai pour $n=0$ (et se lit $a_0+1=a_0+1$). Supposons le vrai à un rang $n\in\mathbb{N}$; on a alors $1+a_{n+1}=(1+a_n)^2=((1+a_0)^{2^n})^2=(1+a_0)^{2^{n+1}}$ ce qui montre le résultat au rang $n+1$.

Q18 — 5 point(s) — Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1|=1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1|=1$.

Soit a une racine complexe de P. On a alors $1+(a+1)^{2^n}$ qui est, pour tout n racine de P. Si, par l'absurde, $|a+1|<1$, la suite de terme général $(a+1)^{2^n}$ est de limite nulle et, P étant continue, on a alors $P(1)=0$ ce qui est faux. Ainsi, $|a+1|\geqslant 1$.
Si, par l'absurde, $|a+1|>1$ alors $|1+(a+1)^{2^n}|\geqslant |a+1|^{2^n}-1\longrightarrow+\infty$ et on a donc une suite de racines de P de module de plus en plus grand et donc une infinité de racines ce qui contrdit $P\neq 0$. On a donc aussi $|a+1|\leqslant 1$.

Q19 — 2 point(s) — Montrer que si le degré de P est strictement positif alors P a pour unique racine 0.

On suppose P non constant. Soit a une racine de P; son image dans le plan complexe doit être sur le cercle de centre $(-1,0)$ de rayon 1 et sur le cercle de centre $(1,0)$ de rayon 1. On a donc nécessairement $a=0$. Comme P possède au moins une racine (polynôme complexe non constant), 0 est son unique racine.

Q20 — 6 point(s) — Déterminer tous les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

- Tout polynôme non nul est scindé sur $\mathbb{C}$. D'après la question précédente, les seules solutions envisageables sont les polynômes constants non nuls et ceux du type cX^d avec $d\in\mathbb{N}^*$ et $c\neq 0$. Finalement, les seuls solutions envisageables sont du type cX^d avec $c\neq 0$ et $d\in\mathbb{N}$.
- Réciproquement, pour $P=cX^d$ avec $c\neq 0$ et $d\in\mathbb{N}$, $P(X^2-1)=P(X-1)P(X+1)$ s'écrit $c(X^2-1)^d=c^2(X^2-1)^d$. Ceci n'a lieu (quand $c\neq 0$) que pour $c=1$.

Les solutions non nulles sont donc les monômes X^d.

§ 5 Interpolation polynomiale et phénomène de Runge[2] (Christophe Devulder)

Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a<b$, on pose

$$||f||_\infty=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

Si f et g sont deux fonctions bornées sur $[a,b]$, alors la fonction $f-g$ est bornée sur $[a,b]$ et la quantité $||f-g||_\infty$ mesure l'écart entre les deux courbes représentant les fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».

2. Extrait de l'épreuve 1 du concours CCINP de 2018 en filière MP

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts. On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.
Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme ℓ_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\ell_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq i}}^{n} \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$$

On pose

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(X)$$

Q21 — 2+3 point(s) — Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

- x_k est racine de ℓ_i pour $i \neq k$ et $\ell_i(x_i) = 0$, c'est-à-dire

$$\ell_i(x_k) = \delta_{i,k}$$

On en déduit que

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ L_n(f)(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\delta_{i,k} = f(x_k)$$

$L_n(f)$ interpole donc f aux points $x_0, \ldots, x_n$.
- Si P est un autre polynôme interpolateur alors $P - L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$ s'annule aux points $x_0, \ldots, x_n$. C'est un polynôme de degré $\leqslant n$ ayant au moins $n+1$ racines et c'est donc le polynôme nul.

$$\boxed{L_n(f) \text{ est l'unique polynôme interpolateur de } f \text{ aux points } x_0, \ldots, x_n.}$$

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

Q22 — 4 point(s) — *Informatique* : si $y_0, \ldots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x=[-1,0,1]` et `y=[4,0,4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi `lagrange(x,y,3)` renverra 36.

```python
def l(i,x,a):
   """
   calcul de li(a) associe aux xk
   """
    r=1
    for k in range(len(x)):
        if k!=i:
            r=r*(a-x[k])/(x[i]-x[k])
    return r

def lagrange(x,y,a):
   """
   calcul de la somme definissant Ln associee aux yi
   """
    s=0
    for i in range(len(x)):
        s=s+l(i,x,a)*y[i]
    return s
```

Q23 — 2+3 point(s) — *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \ldots, a_n$

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \quad\vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases} \iff V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x)n \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$. Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauß.

La matrice cherchée est une matrice de Vandermonde

$$V = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Dans la résolution par méthode de Gauss,

- on cherche un pivot sur la colonne 1 que l'on ramène en position 1 (n opérations) et on fait appraître des zéros par $n-1$ combinaisons de lignes ($O(n^2)$ opérations)
- on procède de même avec les colonnes $2, \dots, n+1$ pour à chaque fois $O(n^2)$ opérations
- on en déduit $x_{n+1}, \dots, x_0$ en $O(1+2+\dots+(n+1)) = O(n^2)$ opérations.

$\boxed{\text{La complexité du calcul est } O(n^3).}$

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a,b]$, la propriété suivante notée $\mathscr{P}_x$

$$\exists c_x \in \,]a,b[\quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x)$$

Q24 — 5 point(s) — Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Montrons par récurrence (finie) que la propriété : « $\phi^{(k)}$ s'annule $p+1-k$ fois » est vraie pour $k = 0, \dots, p$.

- Le résultat est vrai au rang 0 par hypothèse sur ϕ.
- Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que le résultat soit vrai au rang k. On note $y_1 < \dots < y_{p+1-k}$ des points d'annulation de $\phi^{(k)}$. Par théorème de Rolle appliqué à $\phi^{(k)}$, $\phi^{(k+1)}$ s'annule sur $]y_i, y_{i+1}[$ pour $i = 1, \dots, p-k$. $\phi^{(k+1)}$ admet donc au moins $p-k$ annulations et lerésultat est vrai au rang $k+1$.

On en déduit en particulier (propriété au rang p) que $\phi^{(p)}$ s'annule. Ce zéro est strictement entre le minimum et le maximum des éléments de σ et donc dans $]a,b[$.

$\boxed{\text{Si } \phi \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \text{ s'annule } p+1 \text{ fois, il existe } c \in]a,b[\text{ tel que } \phi^{(p)}(c) = 0.}$

Q25 — 1 point(s) — Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

$f - L_n(f)$ ainsi que π_σ s'annulent en tout point de σ. Pour $x \in \sigma$, $\mathscr{P}_x$ est donc vraie (on peut choisir pour c_x n'importe quel élément de $]a,b[$).

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \sigma, \text{ la propriété } \mathscr{P}_x \text{ est vraie.}}$

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t)$$

Q26 — 3 point(s) — Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Comme $x \notin \sigma$, $\pi_\sigma(x) \neq 0$ et on peut donc poser

$$\boxed{\lambda = \frac{f(x) - L_n(f)(x) - F(x)}{\pi_\sigma(x)}}$$

et on a alors $F(x) = 0$.

Q27 — 5 point(s) — Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathscr{P}_x$ est vraie.

- F s'annule (comme $f - L_n(f)$ et π_σ) en tout point de σ et en $x \notin \sigma$. On a donc $n+2$ points d'annulation au moins.

$$\boxed{F \text{ s'annule } n+2 \text{ fois}}$$

- On en déduit avec **Q24** que $F^{(n+1)}$ s'annule en un point $c_x \in]a,b[$. Comme $L_n(f) \in \mathbb{R}_n[X]$, sa dérivée $n+1$-ième est nulle.

Comme π_σ est unitaire de degré $n+1$, sa dérivée $n+1$-ième est le polynôme constante $(n+1)!$. On en déduit que $\lambda = \dfrac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Comme $F(x) = 0$, on obtient $\mathscr{P}_x$.

$$\boxed{\forall x \in [a,b],\ \mathscr{P}_x \text{ est vraie}}$$

Q28 — 5 point(s) — Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$||f - L_n(f)||_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!}\ ||f^{(n+1)}||_\infty$$

- D'après le théorème des bornes atteintes

$$\boxed{f^{(n+1)} \text{ est continue sur le segment } [a,b] \text{ et donc bornée sur ce segment}}$$

- On remarque que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |\pi_\sigma(x)| \leqslant (b-a)^n$$

Avec la propriété $\mathscr{P}_x$, on en déduit que

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \left|f(x) - L_n(f)(x)\right| \leqslant \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ ||f^{(n+1)}||_\infty}_{\text{indépendant de } x}$$

Par passage au sup

$$\boxed{||f - L_n(f)||_\infty \leqslant \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\ ||f^{(n+1)}||_\infty}$$

Q29 — 3 point(s) — En déduire que si f est la fonction sinus

$$||f - L_n(f)||_{\infty,[0,2\pi]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On imagine ici que l'on se donne une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux distincts de $[0,2\pi]$ et que l'on considère pour chaque n le polynôme $L_n(f)$ associé à $\sigma_n = \{x_0,\dots,x_n\}$. On définit alors une suite de polynômes. Comme sin et toute ses dérivées sont majorées en module par 1 sur $\mathbb{R}$, on en déduit avec la question précédente que

$$0 \leqslant ||f - L_n(f)||_{\infty,[0,2\pi]} \leqslant \frac{(2\pi)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Par croissances comparées (ou l'équivalent de Stirling), le majorant est de limite nulle et ainsi, par théorème d'encadrement

$$\boxed{||f - L_n(f)||_{\infty,[0,2\pi]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

Q30 — 5 point(s) — On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide de développements limités en 0 que

$$\forall k\in\mathbb{N}\quad \left|\left|f^{(2k)}\right|\right|_\infty \geqslant (2k)!$$

Soit $n\in\mathbb{N}$.

- On sait que

$$(\star)\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)k\cdot x^{2k}+\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

c La fonction f est de classe $\mathscr{C}^{2n}$ (et même $\mathscr{C}^{\infty}$) sur $\mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor-Young

$$(\star\star)\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\cdot x^k+\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$$

- De $(\star)$, $(\star\star)$ et de l'unicité du $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de f, nous déduisons

$$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=(-1)^n$$

puis $f^{(2n)}(0)=(-1)^n\cdot(2n)!$. On en déduit que

$$\left|\left|f^{(2n)}\right|\right|_\infty \geqslant |f^{(2n)}(0)|=(2n)!$$

après avoir remarqué que $\left|\left|f^{(2n)}\right|\right|_\infty$ est un réel bien défini puisque la fonction $f^{(2n)}$ est continue sur le segment $[-1,1]$ (théorème des bornes atteintes).

$$\boxed{\left|\left|f^{(2n)}\right|\right|_\infty \geqslant |f^{(2n)}(0)|=(2n)!}$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Plus précisément, cela peut entraîner que $\left|\left|f-L_n(f)\right|\right|_\infty$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ce comportement est appelé « phénomène de Runge ».

§ 6 Équations algébriques réciproques[3] (Jean-Louis Lamard)

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Si $P\in\mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si $n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes $P\in\mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P)\leqslant n$.

Q31 — 3 point(s) — Montrer que si $n\in\mathbb{N}$, l'application $u_n\colon \mathbb{R}_n[X]\longrightarrow\mathbb{R}_n[X]$ donnée par la formule :

$$u_n(P)(X)=X^n\,P\left(\frac{1}{X}\right)$$

est bien définie, qu'elle est linéaire et involutive (sa composée avec elle-même donne l'identité).

Si $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, il vient :

$$u_n(P)=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}X^k\,.$$

ce qui prouve que u_n est bien une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Elle est clairement linéaire et involutive.

Un polynôme $R\in\mathbb{R}[X]$ est dit réciproque de première espèce s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit réciproque de deuxième espèce s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

Q32 — 4 point(s) — Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathscr{P}$ (respectivement à $\mathscr{D}$).

3. Extrait de l'épreuve 1 du concours Mines-Ponts de 2012 en filière MP

Il résulte immédiatement de ce qui précède que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ appartient à $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{D}$) si et seulement si $a_k = a_{n-k}$ (resp. $a_k = -a_{n-k}$) pour tout $k \in [\![0, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\!]$.

Q33 — 1+1+1+1 point(s) — Établir que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est réciproque (c'est-à-dire $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$) et x est une racine de R, alors x est non nul et $\frac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathscr{D}$ admet 1 pour racine et que tout polynôme de $\mathscr{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.

- Soit R réciproque (donc non nul). Si R est constant alors $R = a_0 \neq 0$ et si $\deg(R) = n \geqslant 1$, alors $a_0 = \pm a_n \neq 0$. Dans les deux cas, 0 n'est pas racine de R.
- Soit désormais R un polynôme réciproque admettant x comme racine. Alors R est nécessairement de degré $n \geqslant 1$ d'après ce qui précède et
$$R\left(\frac{1}{x}\right) = \pm \frac{1}{x^n} R(x) = 0 .$$
Donc $\frac{1}{x}$ est également racine de R.
- Soit $R \in \mathscr{D}$ de degré n. Il vient :
$$X^n R\left(\frac{1}{X}\right) = -R(X)$$
et donc $R(1) = -R(1)$. Ainsi 1 est racine de tout élément de $\mathscr{D}$.
- Soit $R \in \mathscr{D}$ de degré $2n+1$. Il vient :
$$X^{2n+1} R\left(\frac{1}{X}\right) = R(X)$$
et donc $-R(-1) = R(-1)$. Ainsi -1 est racine de tout élément de $\mathscr{P}$ de degré impair.

Q34 — 4+2 point(s) — Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.

- Supposons P et Q réciproques de degrés respectifs p et q. Il vient :
$$X^p P\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon_1 P(X) \qquad \text{et} \qquad X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon_2 Q(X)$$
avec $\varepsilon_1 = \pm 1$ et $\varepsilon_2 = \pm 1$ suivant l'espèce des polynômes. Alors $R = PQ$ est de degré $r = p + q$ et :
$$X^r R\left(\frac{1}{X}\right) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon_1 P(X) \varepsilon_2 Q(X) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 R(X) .$$
Donc R est réciproque et son espèce est donnée par le signe $\varepsilon_1 \varepsilon_2$.
- Supposons désormais $R = PQ$ réciproque et, par exemple, P réciproque. On note toujours p et q les degrés respectifs de p et q, l'espèce de R étant donnée par ε.
D'une part :
$$X^{p+q} P\left(\frac{1}{X}\right) Q\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon P(X) Q(X)$$
et d'autre part :
$$X^{p+q} P\left(\frac{1}{X}\right) Q\left(\frac{1}{X}\right) = X^p P\left(\frac{1}{X}\right) X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) = \varepsilon_1 P(X) X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) .$$
Ainsi a-t-on l'égalité
$$X^q Q\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\varepsilon P(X) Q(X)}{\varepsilon_1 P(X)} = \varepsilon\, \varepsilon_1\, Q(X) .$$
- En conclusion, si $R = PQ$ et si deux de ces trois polynômes sont réciproques alors le troisième l'est également et soit ils sont tous trois de première espèce, soit deux sont de deuxième espèce et le troisième de première espèce.

Q35 — 2+2 point(s) — Vérifier que $P \in \mathscr{P}$ implique $(X-1)P \in \mathscr{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathscr{D}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathscr{P}$ tel que $D = (X-1)P$.

- On note $X-1\in\mathscr{D}$. Donc si $P\in\mathscr{P}$, alors $(X-1)P\in\mathscr{D}$ par la question précédente.
- Réciproquement si $D\in\mathscr{D}$, alors 1 est racine de $\mathscr{D}$ (**Q33**). Donc il existe $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $D=(X-1)P$ et la question précédente implique que $P\in\mathscr{P}$.
- En conclusion, $D\in\mathscr{D}$ si et seulement s'il existe $P\in\mathscr{P}$ tel que $D=(X-1)P$.

Q36 — 2 point(s) — Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathscr{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.

Si $P\in\mathscr{P}$ est de degré impair, alors -1 est racine de P (**Q33**) et on prouve exactement comme ci-dessus qu'un polynôme P de degré impair appartient à $\mathscr{P}$ si et seulement s'il existe $D\in\mathscr{D}$ tel que $P=(X+1)D$.

Q37 — 4+2 point(s) — Démontrer que si $p\in\mathbb{N}$, alors il existe un unique $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x\in\mathbb{R}^*$

$$x^p+\frac{1}{x^p}=P\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Quel est le degré de P ?

- L'unicité, en cas d'existence, est évidente, car si P et Q sont deux polynômes convenant, il prennent la même valeur en une infinité de réels. En effet, on peut démontrer (en résolvant des équations de degré 2 à paramètre par exemple) que l'image de la fonction
$$x\longmapsto x+\frac{1}{x}$$
définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\mathbb{R}_+^*$ (ensemble infini).
- Pour l'existence, on raisonne par récurrence double sur p. Soit le prédicat $\mathscr{E}_p$:
$$\text{« il existe un polynôme } P_p \text{ de degré } p \text{ tel que, pour tout } x\in\mathbb{R}^*,\ x^p+\frac{1}{x^p}=P_p\left(x+\frac{1}{x}\right)\text{ »}$$
  - <u>Initialisation :</u> $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{E}_1$ sont vrais. $P_0:=2$ et $P_1:=X$ conviennent.
  - <u>Hérédité :</u> Supposons $\mathscr{E}_k$ vrai jusqu'au rang p avec $p\geqslant 1$. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Il vient alors :
$$\begin{aligned} x^{p+1}+\frac{1}{x^{p+1}} &= \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^p+\frac{1}{x^p}\right)-\left(x^{p-1}+\frac{1}{x^{p-1}}\right)\\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)P_p\left(x+\frac{1}{x}\right)-P_{p-1}\left(x+\frac{1}{x}\right) && \text{[hypothèse de récurrence]}\\ &= P_{p+1}\left(x+\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$
  où $P_{p+1}=XP_p-P_{p-1}$.

Q38 — 2+2+2 point(s) — Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine. Montrer que R est réciproque de première espèce de degré pair. En déduire qu'il existe $P\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^*$, on ait l'équivalence

$$R(x)=0\quad\Longleftrightarrow\quad P\left(x+\frac{1}{x}\right)=0\,.$$

Y a-t-il unicité du polynôme P ? de $\deg(P)$?

- Soit R réciproque n'admettant ni 1, ni -1 comme racine. Alors R est réciproque de deuxième espèce et de degré $2n$ pair, d'après **Q33**.
- Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Comme R est de première espèce et de degré $2n$
$$R(x)=\sum_{k=0}^{n-1}a_{2n-k}x^k\ +\ a_nx^n\ +\sum_{k=n+1}^{2n}a_kx^k\qquad\text{[cf. Q32]}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^n}\,R(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-k}x^{k-n} + a_n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-k}x^{k-n} + a_n + \sum_{\ell=0}^{n-1} a_{2n-\ell}\,x^{n-\ell} \qquad [\ell = 2n-k]\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-k}\left(x^{n-k}+\frac{1}{x^{n-k}}\right) + a_n\,.
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, il existe donc un polynôme P (de degré n) tel que :

$$\frac{1}{x^n}\,R(x) = P\left(x+\frac{1}{x}\right).$$

Donc $x \neq 0$ est racine de R si et seulement si $P\left(x+\frac{1}{x}\right) = 0$.

- Ce polynôme P n'est pas unique, ni même son degré car par exemple $\left(X^2+1\right)P$ convient également. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 + 1 \neq 0$.