Devoir Surveillé n°9

Samedi 11 mars – 8h15-12h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Questions de cours

Q1 — Énoncer le résultat sur la primitivation d'un développement limité, puis le démontrer.

Q2 — Énoncer la formule de Taylor-Young, puis la démontrer.

Q3 — Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de la fonction ch.

Q4 — Donner le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction $f\colon x \longmapsto \sqrt{1+x}$.

§ 2 Étude locale d'une fonction

Q5 — Déterminer un réel $\delta > 0$ tel que la fonction

$$f \left| \begin{array}{ccc}]-\delta,0[\cup]0,\delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{x}{\sin(x)}\right) \end{array} \right.$$

est définie.

Q6 — Démontrer que la fonction f se prolonge par continuité en 0.

Nous noterons (abusivement) encore f le prolongement par continuité de f à l'intervalle $]-\delta,\delta[$.

Q7 — Calculer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de f.

Q8 — On munit le plan d'un repère et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f. Quelles propriétés de la fonction f et de la courbe $\mathscr{C}$ peut-on déduire de **Q7** ?

§ 3 DL de tangente et d'arctangente à l'ordre 6 en 0

Q9 — Justifier que la fonction tan possède un $\mathrm{DL}_6(0)$.

Q10 — Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction tan.

Q11 — Déterminer le $\mathrm{DL}_6(0)$ de la fonction $f\colon x \longmapsto \tan\left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5}\right)$.

§ 4 Une équation polynomiale[1]

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients complexes. Dans tout cet exercice, on identifie les éléments de $\mathbb{C}[X]$ et leurs fonctions polynomiales associées. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul vérifiant la relation

$$(*) \qquad P\left(X^2-1\right) = P(X-1)P(X+1)$$

Q12 — Montrer que si a est racine de P alors $(a+1)^2-1$ et $(a-1)^2-1$ sont aussi des racines de P.

Soit $a_0 \in \mathbb{C}$. On définit la suite de nombres complexes $(a_n)_{n\geqslant 0}$ en posant, pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + 2a_n$.

Q13 — Vérifier que lorsque a_0 est une racine, pour tout entier naturel n le nombre complexe a_n est une racine de P.

Q14 — Montrer que lorsque a_0 est un réel strictement positif la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite strictement croissante de réels positifs.

Q15 — En déduire que P n'admet pas de racine réelle strictement positive.

Q16 — Montrer que -1 n'est pas racine de P.

Q17 — Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + 1 = (a_0+1)^{2^n}$.

Q18 — Déduire des questions précédentes que si a est une racine complexe de P alors $|a+1| = 1$. On admettra que l'on a aussi $|a-1| = 1$.

Q19 — Montrer que si le degré de P est strictement positif alors P a pour unique racine 0.

Q20 — Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifient la relation $(*)$.

§ 5 Interpolation polynomiale et phénomène de Runge[2]

Si f est une fonction réelle bornée sur $[a,b]$ avec $a<b$, on pose

$$||f||_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

Si f et g sont deux fonctions bornées sur $[a,b]$, alors la fonction $f-g$ est bornée sur $[a,b]$ et la quantité $||f-g||_\infty$ mesure l'écart entre les deux courbes représentant les fonctions f et g dans le plan muni d'un repère orthonormé. On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n. On pourra confondre les expressions « polynômes » et « fonctions polynomiales ».
Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On se donne $n+1$ points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ dans $[a,b]$, deux à deux distincts. On appelle polynôme interpolateur de f aux points x_i, un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ qui coïncide avec f aux points x_i, c'est-à-dire tel que pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = f(x_i)$.
Pour tout entier i de $[\![0,n]\!]$, on définit le polynôme ℓ_i de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\ell_i(X) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{X-x_k}{x_i-x_k}$$

On pose

$$L_n(f) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(X)$$

1. Extrait de l'épreuve du concours E3A de 2011 en filière PSI
2. Extrait de l'épreuve 1 du concours CCINP de 2018 en filière MP

Q21 — Démontrer que $L_n(f)$ est un polynôme interpolateur de f aux points x_i, puis démontrer l'unicité d'un tel polynôme.

Un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange.

Q22 — *Informatique* : si $y_0, \dots, y_n$ sont des réels, le polynôme $P = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(X)$ est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $P(x_i) = y_i$ pour tout i. Écrire en langage Python une fonction `lagrange` qui prend en arguments x une liste de points d'interpolations x_i, y une liste d'ordonnées y_i de même longueur que x, a un réel, et qui renvoie la valeur de P en a.
Par exemple, si `x=[-1,0,1]` et `y=[4,0,4]`, on montre que $P = 4X^2$ et donc $P(3) = 36$. Ainsi `lagrange(x,y,3)` renverra 36.

Q23 — *Informatique* : chercher le polynôme interpolateur $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ de f aux points x_i revient aussi à résoudre le système linéaire suivant d'inconnues $a_0, \dots, a_n$

$$\begin{cases} P(x_0) = f(x_0) \\ \quad \vdots \\ P(x_n) = f(x_n) \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad V \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ \vdots \\ f(x_)n \end{pmatrix}$$

où V est une matrice carrée de taille $n+1$. Déterminer la matrice V et indiquer la complexité du calcul en fonction de n, lorsque l'on résout ce système linéaire par la méthode du pivot de Gauß.

On suppose, en plus dans cette partie, que f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$. On rappelle que $L_n(f)$ est son unique polynôme interpolateur aux points x_i.
On note $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ l'ensemble des points d'interpolations et π_σ le polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ défini par

$$\pi_\sigma = \prod_{i=0}^{n} (X - x_i)$$

On veut démontrer pour tout réel $x \in [a,b]$, la propriété suivante notée $\mathscr{P}_x$

$$\exists c_x \in \,]a,b[\quad f(x) - L_n(f)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!} \pi_\sigma(x)$$

Q24 — Résultat préliminaire : soit $p \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $\phi \;:\; [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction p-fois dérivable qui s'annule $p+1$ fois, alors il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $\phi^{(p)}(c) = 0$.

Q25 — Justifier que pour tout $x \in \sigma$, la propriété $\mathscr{P}_x$ est vraie.

On fixe x un réel de $[a,b]$ qui n'est pas dans σ. Soit λ un réel. On définit sur $[a,b]$ une application F par

$$F(t) = f(t) - L_n(f)(t) - \lambda \pi_\sigma(t)$$

Q26 — Déterminer un réel λ de sorte que $F(x) = 0$. On choisira alors λ de cette façon.

Q27 — Démontrer que F s'annule $n+2$ fois et en déduire que $\mathscr{P}_x$ est vraie.

Q28 — Justifier que la fonction $f^{(n+1)}$ est bornée sur $[a,b]$ et en déduire un réel positif K indépendant de n tel que

$$||f - L_n(f)||_\infty \leqslant \frac{K^{n+1}}{(n+1)!} \, ||f^{(n+1)}||_\infty$$

Q29 — En déduire que si f est la fonction sinus

$$||f - L_n(f)||_{\infty,[0,2\pi]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Q30 — On définit f sur $[-1,1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. Démontrer à l'aide de développements limités en 0 que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \left|\left|f^{(2k)}\right|\right|_{\infty} \geqslant (2k)!$$

Cette dernière inégalité montre que la quantité $\|f^{(n+1)}\|_\infty$ peut être grande et cela peut empêcher parfois la convergence de la suite de polynômes interpolateurs. Plus précisément, cela peut entraîner que $||f - L_n(f)||_\infty$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Ce comportement est appelé « phénomène de Runge ».

§ 6 Équations algébriques réciproques[3]

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\deg(P)$ son degré. Si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\deg(P) \leqslant n$.

Q31 — Montrer que si $n \in \mathbb{N}$, l'application $u_n \colon \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X]$ donnée par la formule :

$$u_n(P)(X) = X^n\, P\left(\frac{1}{X}\right)$$

est bien définie, qu'elle est linéaire et involutive (sa composée avec elle-même donne l'identité).

Un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ est dit réciproque de première espèce s'il est non nul et invariant par $u_{\deg(R)}$; il est dit réciproque de deuxième espèce s'il est non nul et transformé en son opposé par $u_{\deg(R)}$. On note $\mathscr{P}$ (respectivement $\mathscr{D}$) l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ réciproques de première (respectivement de deuxième) espèce.

Q32 — Donner une condition nécessaire et suffisante sur ses coefficients pour qu'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$ appartienne à $\mathscr{P}$ (respectivement à $\mathscr{D}$).

Q33 — Établir que si $R \in \mathbb{R}[X]$ est réciproque (c'est-à-dire $R \in \mathscr{P} \cup \mathscr{D}$) et x est une racine de R, alors x est non nul et $\dfrac{1}{x}$ est aussi une racine de R. Montrer par ailleurs que tout polynôme de $\mathscr{D}$ admet 1 pour racine et que tout polynôme de $\mathscr{P}$ de degré impair admet -1 pour racine.

Q34 — Étant donné trois polynômes P, Q, R de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = QR$, montrer que si deux d'entre eux sont réciproques, alors le troisième l'est aussi. Établir un lien entre les espèces de ces trois polynômes réciproques.

Q35 — Vérifier que $P \in \mathscr{P}$ implique $(X-1)P \in \mathscr{D}$. Réciproquement, montrer que si $D \in \mathscr{D}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathscr{P}$ tel que $D = (X-1)P$.

Q36 — Établir un résultat analogue caractérisant les polynômes de $\mathscr{P}$ de degré impair dans $\mathbb{R}[X]$.

Q37 — Démontrer que si $p \in \mathbb{N}$, alors il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$x^p + \frac{1}{x^p} = P\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Quel est le degré de P ?

Q38 — Soit R un élément de $\mathbb{R}[X]$ réciproque n'admettant ni 1 ni -1 comme racine. Montrer que R est réciproque de première espèce de degré pair. En déduire qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait l'équivalence

$$R(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad P\left(x + \frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

Y a-t-il unicité du polynôme P ? de $\deg(P)$?

3. Extrait de l'épreuve 1 du concours Mines-Ponts de 2012 en filière MP