Un corrigé du Devoir Surveillé n°8

— 76 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

> Cf. C15.93.

Q2 — 0 ou 3 + 10 point(s) — Énoncer le théorème des bornes atteintes, puis le démontrer.

> Cf. C15.101.

Q3 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer la définition d'un point en lequel une fonction atteint un maximum local.

> Cf. C15.132.

Q4 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

> Cf. C15.135.

Q5 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer le théorème des accroissements finis.

> Cf. C15.138.

§ 2 Suite récurrente et application contractante

Soit la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. .$$

On pourra s'appuyer sur les inégalités

$$\frac{74}{100} < \ln\left(\frac{19}{9}\right) < \frac{75}{100} \qquad \textit{et} \qquad \frac{88}{100} < \ln\left(\frac{17}{7}\right) < \frac{89}{100}$$

sans les démontrer.

Q6 — 1+1 point(s) — Étudier les limites éventuelles de f aux bornes de son ensemble de définition.

> - Comme $1+\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ et $\ln(X) \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$, il vient
>
> $$f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$
>
> par théorème de composition de limites.

- Comme $1+\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$ et $\ln(X)\xrightarrow[X\to 1]{}0$ (continuité de ln en 1), il vient

$$f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

par théorème de composition de limites.

Q7 — 3 point(s) — Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- Comme $\dfrac{1}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ et $\dfrac{\ln(1+X)}{X}\xrightarrow[X\to 0]{}1$ (dérivabilité et dérivée de ln en 1), il vient

$$x f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$$

par théorème de composition de limites. Ainsi

$$f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{1}{x}.$$

Q8 — 1+1 point(s) — Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

- Les fonctions

$$u\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & 1+\dfrac{1}{x}\end{array}\right. \quad\text{et}\quad v\left|\begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \ln(x)\end{array}\right.$$

sont dérivables sur leurs domaines de définition et $u\left(\mathbb{R}_+^*\right)\subset\mathbb{R}_+^*$.

- Par théorème de composition des fonctions dérivables, la fonction $v\circ u=f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*\quad f'(x)=u'(x)\times v'(u(x))=-\frac{1}{x^2}\times\frac{1}{1+\dfrac{1}{x}}=-\frac{1}{x^2+x}.$$

Q9 — 2 point(s) — Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $f'(x)<0$. D'après le critère différentiel de stricte monotonie, la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q10 — 1 point(s) — Démontrer que l'intervalle $I:=\left[\dfrac{7}{10},\dfrac{9}{10}\right]$ est stable par f.

Soit $x\in I$.

- Comme la fonction f est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $0<\dfrac{7}{10}\leqslant x\leqslant\dfrac{9}{10}$

$$\ln\left(\frac{19}{9}\right)=f\left(\frac{9}{10}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{7}{10}\right)=\ln\left(\frac{17}{7}\right).$$

- Grâce aux inégalités données dans l'énoncé, nous en déduisons que

$$\frac{7}{10}<\frac{37}{50}<f(x)<\frac{89}{100}<\frac{9}{10}.$$

Ainsi $f(x) \in I$.

Q11 — 3 point(s) — Démontrer que la fonction f est $\dfrac{9}{10}$-lipschitzienne sur I.

- Soit $x \in I$ Ainsi
$$0 \leqslant \frac{7}{10} \leqslant x \leqslant \frac{9}{10} \qquad \text{et} \qquad \frac{49}{100} \leqslant x^2 \leqslant \frac{81}{100}$$
puisque la fonction carrée est (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$. En sommant membre-à-membre ces inégalités, on obtient
$$0 < \frac{119}{100} \leqslant x + x^2 \leqslant \frac{171}{100} .$$
Par croissance de la fonction $x \longmapsto -\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
$$-\frac{100}{119} \leqslant f'(x) = -\frac{1}{x+x^2} \leqslant -\frac{100}{171} < 0 .$$
Comme la fonction valeur absolue est (strictement) décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ il vient
$$\left|f'(x)\right| \leqslant \frac{100}{119} \leqslant \frac{9}{10} .$$
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle I et, pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant \dfrac{100}{119} \leqslant \dfrac{9}{10}$. D'après l'inégalité des accroissements finis, la fonction f est $\dfrac{9}{10}$-lipschitzienne sur I.

Q12 — 2+2 point(s) — Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et que cette solution, notée α, appartient à I.

- La fonction
$$\Delta \;\left|\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x \end{array}\right.$$
est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme combinaison linéaire de telles fonctions. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\Delta'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{x^2+x} - 1 < 0 .$$
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. D'après le critère différentiel de stricte monotonie, elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc injective. L'équation $\Delta(x) = 0$ possède donc au plus une solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction Δ est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$. D'après le théorème sur l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone, nous en déduisons
$$\Delta(]0,+\infty[) = \left] \lim_{+\infty} \Delta \,,\, \lim_{0^+} \Delta \right[$$
où l'existence des limites étant assurée par le théorème de la limite monotone pour les fonctions. De Q6, nous déduisons
$$\lim_{+\infty} \Delta = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{0^+} \Delta = +\infty$$
puis $\Delta(]0,+\infty[) = \mathbb{R}$. Comme $0 \in \Delta(]0,+\infty[)$, l'équation $\Delta(x) = 0$ possède au moins une solution sur $\mathbb{R}_+^*$.
- D'après les deux points précédents, l'équation $\Delta(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$, notée α.

- D'après les inégalités données dans l'énoncé

$$\Delta\left(\frac{7}{10}\right) = \ln\left(\frac{17}{7}\right) - \frac{7}{10} > \frac{88}{100} - \frac{7}{10} = \frac{9}{50} > 0 \qquad \text{et} \qquad \Delta\left(\frac{9}{10}\right) = \ln\left(\frac{19}{9}\right) - \frac{9}{10} < \frac{75}{100} - \frac{9}{10} = -\frac{3}{20} < 0\,.$$

La fonction Δ est continue sur l'intervalle I et 0 est un nombre entre $\Delta\left(\frac{9}{10}\right)$ et $\Delta\left(\frac{7}{10}\right)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in I$ tel que $\Delta(c) = 0$. Ce nombre c est solution de $\Delta(x) = 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par unicité de la solution de cette équation, il vient $c = \alpha$, puis $\alpha \in I$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{7}{10}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Q13 — 2 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.

Nous établissons ce résultat en raisonnant par récurrence. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}(n) \;:\; u_n \text{ existe et } u_n \in I.$$

- Initialisation à $n = 0$. Le nombre $u_0 = \frac{7}{10}$ est donné dans l'énoncé et appartient à I. Ainsi $\mathscr{P}(0)$ est établie.
- Hérédité. Soit n un entier naturel fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Comme le nombre u_n existe et appartient à I, nous pouvons calculer $u_{n+1} = f(u_n)$, qui existe donc. Par ailleurs, comme l'intervalle I est stable par f (Q10), $u_{n+1} \in I$.
- Conclusion. Comme $\mathscr{P}(0)$ est vraie et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, l'axiome de récurrence permet de conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et appartient à I.

Q14 — 3 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Nous raisonnons de nouveau par récurrence. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{P}(n) \;:\; |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^n |u_0 - \alpha|.$$

- Initialisation à $n = 0$. Comme $\left(\frac{9}{10}\right)^0 = 1$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité. Soit n un entier naturel fixé tel que $\mathscr{P}(n)$ est vraie. Comme $u_n \in I$ (Q13), $\alpha \in I$ (Q12) et la fonction f est $\frac{9}{10}$-lipschitzienne sur I

$$|u_{n+1} - \alpha| = \left|f(u_n) - f(\alpha)\right| \leqslant \frac{9}{10}|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

la dernière inégalité étant obtenue en multipliant chacun des membres de l'inégalité de l'hypothèse de récurrence par $\frac{9}{10} > 0$.
- Conclusion. Comme $\mathscr{P}(0)$ est vraie et comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'implication $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$ est vraie, l'axiome de récurrence permet de conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Q15 — 2 point(s) — En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

- D'après le critère de convergence des suites géométriques réelles, la suite $\left(\left(\frac{9}{10}\right)^n |u_0-\alpha|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En effet, $-1 < \frac{9}{10} < 1$.
- D'après Q14, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leqslant |u_n-\alpha| \leqslant \left(\frac{9}{10}\right)^n |u_0-\alpha| \ .$$

D'après le théorème d'encadrement pour les suites

$$|u_n-\alpha| \longrightarrow 0$$

i.e. $u_n \longrightarrow \alpha$.

Q16 — 3 point(s) — Déterminer un entier naturel n tel que $|u_n-\alpha| \leqslant 10^{-4}$.

- Soit $n\in\mathbb{N}$. Comme α appartient au segment I (Q12) de longueur $\frac{1}{5}$, $|u_0-\alpha| \leqslant \frac{1}{5}$. On déduit alors de Q14 que

$$|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{5}\times\left(\frac{9}{10}\right)^n$$

- Ainsi si n est un entier naturel tel que

$$\frac{1}{5}\times\left(\frac{9}{10}\right)^n \leqslant 10^{-4}$$

alors $|u_n-\alpha| \leqslant 10^{-4}$.
- Or

$$\begin{aligned}
\frac{1}{5}\times\left(\frac{9}{10}\right)^n \leqslant 10^{-4} \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(\frac{9}{10}\right)^n \leqslant 5\times 10^{-4} \\
&\Longleftrightarrow \quad n\ln\left(\frac{9}{10}\right) \leqslant \ln\left(5\times10^{-4}\right) \qquad [\ln \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*] \\
&\Longleftrightarrow \quad n \geqslant \frac{\ln\left(5\times10^{-4}\right)}{\ln\left(\frac{9}{10}\right)} \qquad \left[\ln\left(\frac{9}{10}\right) < 0\right].
\end{aligned}$$

L'entier $n := \left\lfloor \frac{\ln(0{,}0005)}{\ln(0{,}9)} \right\rfloor + 1 = 73$ convient.

§ 3 Théorème de Darboux

Q17 — 2+2 point(s) — Démontrer que la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que sa dérivée n'est pas continue en 0.

- Par théorème d'opération sur les fonctions dérivables, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

- Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Comme la fonction $x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est bornée sur $\mathbb{R}^*$ et $x \xrightarrow[x \neq 0]{x \to 0} 0$, le théorème d'encadrement pour les fonctions livre

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \neq 0]{x \to 0} 0.$$

La fonction f est donc dérivable en 0 avec pour nombre dérivé en 0 $f'(0) = 0$.

- Nous établissons que la fonction f' n'est pas continue en 0, en prouvant par l'absurde que f' n'a pas de limite lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. Supposons donc qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que

$$f'(x) \xrightarrow[x > 0]{x \to 0} \ell.$$

- La suite $\left(\frac{1}{2\pi n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de points de $\mathbb{R}_{>0}$ qui converge vers 0. D'après la caractérisation séquentielle de la limite

$$f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \xrightarrow[x > 0]{x \to 0} \ell.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) = -\cos(2\pi n) = -1$

$$f\left(\frac{1}{2\pi n}\right) \xrightarrow[x > 0]{x \to 0} -1.$$

Par unicité de la limite $\ell = -1$.

- La suite $\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de points de $\mathbb{R}_{>0}$ qui converge vers 0. D'après la caractérisation séquentielle de la limite

$$f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) \xrightarrow[x > 0]{x \to 0} \ell.$$

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) = \frac{2}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$

$$f\left(\frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}\right) \xrightarrow[x > 0]{x \to 0} 0.$$

Par unicité de la limite $\ell = 0$.

- Des deux points précédents, nous déduisons une contradiction.

Q18 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Cf. C7.23

Q19 — 3 point(s) — Soient J_1 et J_2 deux intervalles tels que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Démontrer que $J_1 \cup J_2$ est un intervalle.

Soient x et y des éléments de $J_1 \cup J_2$ tels que $x \leqslant y$ et z un réel tel que $x \leqslant z \leqslant y$. Nous démontrons que $y \in J_1 \cup J_2$ par disjonction de cas.

- Si x et y appartiennent à J_1 alors $z \in J_1 \subset J_1 \cup J_2$ puisque J_1 est un intervalle.
- Le cas où x et y appartiennent à J_2 est analogue.
- Supposons désormais que $x \in J_1 \cap \overline{J_2}$ et $y \in J_2 \cap \overline{J_1}$. Considérons un point c commun aux intervalles J_1 et J_2. Si $c \geqslant y$ alors comme x et c appartiennent à l'intervalle J_1, $y \in J_1$, ce qui n'est pas. Donc $c < y$. De même nous démontrons $c > x$. Ainsi
$$x < c < y\,.$$
  — Si $z \in [x, c]$, comme x et c appartiennent à l'intervalle J_1, $z \in J_1 \subset J_1 \cup J_2$ puisque J_1 est un intervalle.

  — Si $z \in [c, y]$, comme c et y appartiennent à l'intervalle J_2, $z \in J_2 \subset J_1 \cup J_2$ puisque J_2 est un intervalle.

  Dans tous les cas, z appartient à $J_1 \cup J_2$.
- Le cas $x \in \overline{J_1} \cap J_2$ et $y \in J_1 \cap \overline{J_2}$ est analogue au précédent.

Soient

(a) I un intervalle;

(b) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I ;

(c) a et b des points de I tels que $a < b$;

(d) y un nombre réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

On se propose de démontrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f'(c) = y$. Il s'agit d'un théorème dû à Darboux[1].

Q20 — 2 point(s) — Justifier que les deux fonctions suivantes sont continues sur $[a, b]$.

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b \\ \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \end{cases} \end{array} \right.$$

- La fonction f est dérivable sur $[a, b]$ donc continue sur $[a, b]$. Nous en déduisons que la fonction φ est continue sur $]a, b]$. D'autre part, la continuité de φ en a est conséquence de la définition de la dérivabilité et du nombre dérivé de f est a. La fonction f est donc continue en tout point de $[a, b]$.
  - La continuité de la fonction ψ sur $[a, b]$ peut être établie de manière analogue.

Q21 — 8 point(s) — Démontrer que $y \in \varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$.

- La fonction φ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ (Q20). D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\varphi([a, b])$ est un intervalle.
- De même, $\psi([a, b])$ est un intervalle.
- Nous observons que $\varphi(b) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \psi(a)$ est un point commun aux intervalles $\varphi([a, b])$ et $\psi([a, b])$. D'après Q19, $\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$ est un intervalle.
- Comme $f'(a) = \phi(a)$ et $f'(b) = \psi(b)$ appartiennent à l'intervalle $\varphi([a, b]) \cup \psi([a, b])$, le nombre y, qui

1. Gaston Darboux, mathématicien français, 1842-1917

est compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, appartient lui aussi à cet intervalle.

Q22 — 4 point(s) — En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f'(c)$.

- D'après Q21, $y \in \varphi([a,b]) \cup \psi([a,b])$. Nous traitons le cas où $y \in \varphi([a,b])$, le cas où $y \in \psi([a,b])$ pouvant être étudié de manière analogue.
- Supposons donc qu'il existe $d \in [a,b]$ tel que $y = \varphi(d)$.
  — Si $d = a$, alors $y = f'(a)$ et $c := a$ convient.
  — Si $d > a$, comme la fonction f est continue sur le segment $[a,d]$ et dérivable sur l'ouvert $]a,d[$ (puisque dérivable sur $[a,b] \supset [a,d]$) le théorème des accroissements finis livre l'existence d'un point $c \in]a,d[\subset [a,b]$ tel que
  $$y = \varphi(d) = \frac{f(d) - f(a)}{d - a} = f'(c)\,.$$

Q23 — 3 point(s) — Justifier que la fonction partie entière ne possède aucune primitive sur $\mathbb{R}$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ possède une primitive F sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lfloor \cdot \rfloor = F'$. D'après le théorème de Darboux, démontré précédemment, l'image de l'intervalle $\mathbb{R}$ par la fonction $\lfloor \cdot \rfloor = F'$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas puisque l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $\lfloor \cdot \rfloor$ est $\mathbb{Z}$.