Devoir Surveillé n°8

— 76 points —

Mercredi 1er février – 8h00-10h00

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Questions de cours

Q1 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

Q2 — 0 ou 3 + 10 point(s) — Énoncer le théorème des bornes atteintes, puis le démontrer.

Q3 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer la définition d'un point en lequel une fonction atteint un maximum local.

Q4 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Q5 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer le théorème des accroissements finis.

§ 2 Suite récurrente et application contractante

Soit la fonction f définie par

$$f \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) \end{array} \right. .$$

On pourra s'appuyer sur les inégalités

$$\frac{74}{100} < \ln\left(\frac{19}{9}\right) < \frac{75}{100} \qquad \textit{et} \qquad \frac{88}{100} < \ln\left(\frac{17}{7}\right) < \frac{89}{100}$$

sans les démontrer.

Q6 — 1+1 point(s) — Étudier les limites éventuelles de f aux bornes de son ensemble de définition.

Q7 — 3 point(s) — Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q8 — 1+1 point(s) — Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

Q9 — 2 point(s) — Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q10 — 1 point(s) — Démontrer que l'intervalle $I := \left[\dfrac{7}{10}, \dfrac{9}{10}\right]$ est stable par f.

Q11 — 3 point(s) — Démontrer que la fonction f est $\dfrac{9}{10}$-lipschitzienne sur I.

Q12 — 2+2 point(s) — Démontrer que l'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$ et que cette solution, notée α, appartient à I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{7}{10}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Q13 — 2 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \in I$.

Q14 — 3 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{9}{10}\right)^n |u_0 - \alpha|$.

Q15 — 2 point(s) — En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

Q16 — 3 point(s) — Déterminer un entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

§ 3 Théorème de Darboux

Q17 — 2+2 point(s) — Démontrer que la fonction

$$g \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis que sa dérivée n'est pas continue en 0.

Q18 — 0 ou 3 point(s) — Énoncer la définition d'un intervalle de $\mathbb{R}$.

Q19 — 3 point(s) — Soient J_1 et J_2 deux intervalles tels que $J_1 \cap J_2 \neq \emptyset$. Démontrer que $J_1 \cup J_2$ est un intervalle.

Soient

(a) I un intervalle ;

(b) $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I ;

(c) a et b des points de I tels que $a < b$;

(d) y un nombre réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$.

On se propose de démontrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = y$. Il s'agit d'un théorème dû à Darboux[1].

Q20 — 2 point(s) — Justifier que les deux fonctions suivantes sont continues sur $[a,b]$.

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(a) & \text{si } x = a \\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x \neq a \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \psi \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f'(b) & \text{si } x = b \\ \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x \neq b \end{cases} \end{array} \right.$$

Q21 — 8 point(s) — Démontrer que $y \in \varphi([a,b]) \cup \psi([a,b])$.

Q22 — 4 point(s) — En déduire qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $y = f'(c)$.

Q23 — 3 point(s) — Justifier que la fonction partie entière ne possède aucune primitive sur $\mathbb{R}$.

1. Gaston Darboux, mathématicien français, 1842-1917