Devoir Surveillé n°7

Samedi 14 janvier – 8h15-11h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Classe de similitude et trace

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps. Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = PAP^{-1}$. Dans ce cas on note $A \sim B$.

Q1 — Démontrer que la relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Q2 — Que dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblable à I_n ?

Q3 — Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les matrices A^r et B^r sont semblables.

Soient les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définies par $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Q4 — Calculer les matrices QA_1 et A_2Q.

Q5 — Démontrer que la matrice Q est inversible et calculer son inverse, en appliquant l'algorithme du pivot de Gauß sur une matrice augmentée et en expliquant le résultat à l'aide de matrices de transposition/dilatation/transvection.

Q6 — Que dire des matrices A_1 et A_2 ?

La trace d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{Tr}(A)$, est la somme de ses coefficients diagonaux, i.e.

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,i} .$$

Q7 — Démontrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Q8 — Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Q9 — Les matrices $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

§ 2 Commutants de matrices et centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Soient un entier $n \geqslant 2$ et $\mathbb{K}$ un corps. Le commutant $\mathscr{C}(A)$ d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec A, i.e.

$$\mathscr{C}(A) := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ AM = MA\} \ .$$

Le centre $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres, i.e.

$$\mathscr{C} := \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \forall\, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad MN = NM\} = \bigcap_{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})} \mathscr{C}(A) \ .$$

Q10 — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer que $\mathscr{C}(A)$ est stable par combinaison linéaire.

Q11 — Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux-à-deux distincts. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Démontrer que $\mathscr{C}(D)$ est l'ensemble des matrices diagonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Q12 — Soient $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $E_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'adresse (i,j) qui vaut 1. Démontrer que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $M \in \mathscr{C}\left(E_{i,j}\right)$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées.

(a) Pour tout $k \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}$, $[M]_{k,i} = 0$.

(b) Pour tout $\ell \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$, $[M]_{j,\ell} = 0$.

(c) $[M]_{i,i} = [M]_{j,j}$.

Q13 — Démontrer que $\mathscr{C} = \displaystyle\bigcap_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2} \mathscr{C}\left(E_{i,j}\right)$.

Q14 — En déduire que $\mathscr{C} = \mathrm{Vect}\,(I_n)$.

§ 3 Matrices triangulaires strictes et nilpotence

Soient un entier $n \geqslant 3$ et $\mathbb{K}$ un corps. Pour tout $p \in [\![0, n-2]\!]$, on définit la partie F_p de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$F_p := \left\{M = \left(m_{i,j}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \ : \ \forall\,(i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad j - i \leqslant p \Longrightarrow [M]_{i,j} = 0\right\} \ .$$

L'ensemble F_0 est donc l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui sont triangulaires supérieures avec des coefficients diagonaux tous nuls.

Q15 — Soit $p \in [\![0, n-2]\!]$. Écrire F_p comme l'ensemble des combinaisons linéaires d'une famille finie de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et en déduire une propriété de stabilité de F_p.

Q16 — Soit $(A,B) \in F_0 \times F_{n-2}$. Démontrer que la matrice AB est nulle.

Q17 — Soit $(p,q) \in [\![0, n-2]\!]^2$ tel que $p + q \leqslant n - 3$. Soit $(A,B) \in F_p \times F_q$. Démontrer que $AB \in F_{p+q+1}$.

Q18 — En déduire que si $A \in F_0$, alors A^n est la matrice nulle.

Q19 — Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$ des scalaires. Que vaut A^5 si $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 0 \\ g & h & i & j & 0 \end{pmatrix}$?

§ 4 Fonctions arithmétiques multiplicatives et applications [1]

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{D}_n$ l'ensemble des nombres entiers naturels divisant n et on écrit $\sum\limits_{d|n} = \sum\limits_{d \in \mathscr{D}_n}$ la somme sur tous les nombres entiers naturels d divisant n.
Une fonction arithmétique est une fonction $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{C}$. L'ensemble des fonctions arithmétiques est noté $\mathbb{A}$.
On dit qu'une fonction arithmétique $f \in \mathbb{A}$ est multiplicative si

$$\begin{cases} f(1) \neq 0 \\ \forall (m,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ m \wedge n = 1 \implies f(mn) = f(m)f(n) \end{cases}$$

On note $\mathbb{M}$ l'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicatives. On note $\mathbf{1}$, δ et $\mathbf{I}$ les fonctions arithmétiques

$$\mathbf{1} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & 1 \end{array} \right. \qquad \delta \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & \begin{cases} 1 & si\ n = 1 \\ 0 & si\ n \geqslant 2 \end{cases} \end{array} \right. \qquad \mathbf{I} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ n & \longmapsto & n \end{array} \right.$$

On remarque que ces trois fonctions arithmétiques sont multiplicatives.
Si f et g sont deux fonctions arithmétiques, le produit de convolution de f et g est la fonction arithmétique notée $f * g$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Q20 — Énoncer le théorème de changement d'indice pour les sommes finies de nombres complexes.

Q21 — Vérifier que δ est un élément neutre pour la loi $*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{C}_n = \{(d_1, d_2) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ d_1 d_2 = n\}$.

Q22 — Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(f * g)(n) = \sum_{(d_1,d_2) \in \mathscr{C}_n} f(d_1) g(d_2)$$

Q23 — En déduire que $*$ est commutative.

Q24 — De même, en exploitant l'ensemble $\mathscr{C}'_n = \{(d_1, d_2, d_3) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ d_1 d_2 d_3 = n\}$, montrer que $*$ est associative.

Q25 — Que peut-on dire de $(\mathbb{A}, +, *)$?

Q26 — Soient f et g deux fonctions multiplicatives. Montrer que si

$$\forall p \in \mathscr{P},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ f(p^k) = g(p^k)$$

alors $f = g$.

Q27 — Soient m et n deux entiers naturels premiers entre eux. Montrer que l'application

$$\pi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m & \longrightarrow & \mathscr{D}_{mn} \\ (d_1, d_2) & \longmapsto & d_1 d_2 \end{array} \right.$$

1. Extrait de la première épreuve du Concours Centrale-Supélec 2020, filière MP

est bien définie et réalise une bijection entre $\mathscr{D}_n \times \mathscr{D}_m$ et $\mathscr{D}_{mn}$.

Q28 — En déduire que si f et g sont deux fonctions multiplicatives, alors $f * g$ est encore multiplicative.

Q29 — Soit f une fonction multiplicative. Montrer qu'il existe une fonction multiplicative g telle que

$$\forall p \in \mathscr{P},\ \forall k \in \mathbb{N}^*,\ g(p^k) = -\sum_{i=1}^{k} f(p^i) g(p^{k-i})$$

et qu'elle vérifie $f * g = \delta$.

Q30 — Que dire de l'ensemble $\mathbb{M}$ muni de la loi $*$?

Soit μ la fonction arithmétique définie par

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } n = 1 \\ (-1)^r & \textit{si } n \textit{ est le produit de } r \textit{ nombres premiers distincts} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Q31 — Montrer que μ est multiplicative.

Q32 — Montrer que $\mu * \mathbf{1} = \delta$.

Q33 — Soit $f \in \mathbb{A}$ et soit $F \in \mathbb{A}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

On note φ la fonction indicatrice d'Euler, définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \varphi(n) = \mathrm{Card}\{k \in [\![1, n]\!],\ k \wedge n = 1\}$$

On admet[2] que la fonction $\varphi \in \mathbb{M}$.

Q34 — Soient $p \in \mathscr{P}$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\varphi(p^k)$.

Q35 — Démontrer que $\varphi = \mu * \mathbf{I}$.

Soient f une fonction arithmétique, $n \in \mathbb{N}^*$ et $g = f * \mu$. On note $M = (m_{i,j})$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ de terme général $m_{i,j} = f(i \wedge j)$. On définit aussi la matrice des diviseurs $D = (d_{i,j})$ par

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \textit{si } j \textit{ divise } i, \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

Soit M' la matrice de terme général $m'_{i,j} = \begin{cases} g(j) & \textit{si } j \textit{ divise } i, \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases}$.

Q36 — *Montrer que $M = M' D^{\top}$.*

2. Il s'agit d'un théorème du programme de MPI