Un corrigé du Devoir Surveillé n°6

— 144 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 4 point(s) — Énoncer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Q2 — 4 point(s) — Énoncer la définition formelle d'une suite réelle divergeant vers $+\infty$.

Q3 — 4 point(s) — Donner, pour tout $q \in \mathbb{C}$, le comportement asymptotique de la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q4 — 12 point(s) — Énoncer le théorème de la limite monotone et démontrer le résultat dans la cas où la suite est croissante.

§ 2 Série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On se propose de donner un développement asymptotique à deux termes de H_n.

Q5 — 2 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction inverse est décroissante sur $]0,+\infty[$, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$. Nous en déduisons :

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \times (2n-(n+1)+1) = \frac{1}{2}.$$

Q6 — 4 point(s) — Démontrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{n+1} - H_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$. La suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$. Nous démontrons par l'absurde qu'elle ne converge pas, ce qui livrera donc $H_n \to +\infty$.
Supposons qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $H_n \to \ell$. Alors $H_{2n} \to \ell$ (suite extraite). En passant à la limite dans l'inégalité obtenue en **Q5**, il vient $0 \geqslant \dfrac{1}{2}$. Contradiction.

Q7 — 2 point(s) — Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction inverse est décroissante sur $[k,k+1] \subset]0,+\infty[$ donc, pour tout $t \in [k,k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$. Par croissance de l'intégrale ($k \leqslant k+1$), il vient :

$$\frac{1}{k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

Q8 — 4 point(s) — En déduire que $H_n \sim \ln(n)$.

Soit $n \geqslant 2$. En sommant les inégalités de **Q7** pour $k \in [\![1,n-1]\!]$, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Grâce à la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$H_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}.$$

Nous en déduisons l'encadrement :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$$

puis ($\ln(n) > 0$) :

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant \frac{H_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

Grâce au théorème d'encadrement $H_n \sim \ln(n)$.

D'après **Q8**, $H_n = \ln(n) + o(\ln(n))$ *(développement asymptotique à 1 terme).*

Q9 — 2 point(s) — Démontrer que, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

La fonction :

$$\Delta \;\left|\; \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \ln(1+x) \end{array}\right.$$

est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $\Delta'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{x+1}$. D'après le critère différentiel de monotonie, nous avons le tableau de variations suivant.

x	-1		1		$+\infty$
$\Delta'(x)$		$-$	0	$+$	
Δ		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Nous en déduisons que, pour tout $x > -1$, $\Delta(x) \geqslant 0$, i.e. $\ln(1+x) \leqslant x$.

Q10 — 4 point(s) — En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On applique **Q9** avec $x \leftarrow \frac{1}{n+1} > -1$ pour obtenir :

$$\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En spécilisant cette fois **Q9** à $x \leftarrow -\frac{1}{n+1} > -1$, il vient :

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1}$$

puis $(-1 \leqslant 0)$:

$$\frac{1}{n+1} \leqslant -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = H_n - \ln(n+1)$ et $b_n = H_n - \ln(n)$.

Q11 — 4 point(s) — Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Nous démontrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. et $a_n - b_n \to 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$a_n - a_{n+1} = H_n - \ln(n+1) - H_{n+1} + \ln(n+2) = \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right) - \frac{1}{n+1} \underset{\text{Q10}}{\leqslant} 0.$$

$$b_n - b_{n+1} = H_n - \ln(n) - H_{n+1} + \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} \underset{\text{Q10}}{\geqslant} 0.$$

Comme ln est continue en 1 :

$$a_n - b_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \to 0.$$

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et elles ont même limite. On note γ cette dernière (γ est appelée la constante d'Euler).

Q12 — 4 point(s) — Énoncer les encadrements de γ livrés par le théorème des suites adjacentes.

Pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$:

$$a_p = \left(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k}\right) - \ln(p+1) \leqslant \gamma \leqslant \left(\sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k}\right) - \ln(q) = b_q.$$

Q13 — 6 point(s) — Soit $\varepsilon > 0$. Donner un rang N, exprimé à l'aide de la fonction partie entière, tel que $0 \leqslant \gamma - a_N \leqslant \varepsilon$.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En appliquant **Q10** avec $p \leftarrow N$ et $q \leftarrow N$, il vient :

$$a_N \leqslant \gamma \leqslant b_N$$

puis :

$$(\star) \qquad 0 \leqslant \gamma - a_N \leqslant b_N - a_N = \ln(N+1) - \ln(N) = \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \underset{\mathbf{Q9}}{\leqslant} \frac{1}{N}.$$

Posons $N := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$. Comme $\frac{1}{\varepsilon} < \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ et la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$:

$$(\star\star) \qquad \frac{1}{N} = \frac{1}{\left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1} < \varepsilon.$$

De $(\star)$ et $(\star\star)$, nous déduisons $0 \leqslant \gamma - a_N \leqslant \varepsilon$ (transitivité de la relation d'ordre $\leqslant$).

Nous avons établi $H_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$ (développement asymptotique à 2 termes).

§ 3 Théorème de Cesàro et étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

On se propose de démontrer le théorème suivant, dû à Cesàro.

Théorème – Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ et fixons $\varepsilon > 0$.

Q14 — 4 point(s) — Démontrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_1+1$, $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}$.

D'après la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers ℓ, comme $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall\, k \geqslant N_1 \quad |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit $n \geqslant N_1 + 1$ un entier. En sommant ces inégalités pour $k \in [\![N_1+1, n]\!]$, il vient :

$$\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant (n - N_1)\frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}.$$

Donc :

$$\forall\, n \geqslant N_1 + 1 \qquad \sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell| \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}.$$

Q15 — 2 point(s) — Justifier qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_2$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$.

La somme $\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell|$ est constante. Donc :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \to 0\,.$$

En appliquant la définition formelle de la convergence d'une suite, comme $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\forall\, n \geqslant N_2 \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| - 0\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Donc :

$$\forall\, n \geqslant N_2 \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Q16 — 6 point(s) — En déduire qu'il existe $N_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n \geqslant N_0$, $|S_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Posons $N_0 := \max(N_1 + 1, N_2) \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \geqslant N_0$. Comme $n \geqslant N_1 + 1$ et $n \geqslant N_2$, nous disposons des inégalités de **Q14** et **Q15**. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|S_n - \ell| = \left|\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\right) - \ell\right| = \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (u_k - \ell)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |u_k - \ell| = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1} |u_k - \ell|}_{\leqslant \varepsilon/2} + \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n} |u_k - \ell|}_{\leqslant \varepsilon/2} \leqslant \varepsilon\,.$$

Ainsi :

$$\forall\, n \geqslant N_0 \quad |S_n - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Q17 — 4 point(s) — Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?

La suite $(u_n := (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est divergente puisque $u_{2n} \to 1$ et $u_{2n+1} \to -1$. Or :

$$-\frac{1}{n} \leqslant S_n = \frac{1}{n}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} (-1)^k}_{=-1 \text{ ou } 0} \leqslant 0$$

et donc, par théorème d'encadrement, $S_n \to 0$.
Donc la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'implique pas nécessairement la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in\,]0, +\infty[\\ \forall\, n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}\,. \end{cases}$$

Q18 — 2 point(s) — À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

- *Définition du prédicat.* Nous définissons le prédicat $\mathscr{P}(n)$ en la variable $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathscr{P}(n) \ : \ \text{« } u_n \text{ existe et } u_n > 0 \text{ ».}$$

- *Initialisation.* u_0 est une donnée de l'énoncé et $u_0 > 0$. Donc $\mathscr{P}(0)$ est établie.
- *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que u_n existe et $u_n > 0$. Comme $u_n \neq 0$, $u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$ est calculable et donc u_{n+1} existe. D'autre part, comme $u_n > 0$:

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2} > 0\,.$$

- *Conclusion.* De l'initialisation à $n = 0$, l'hérédité et l'axiome de récurrence, nous déduisons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n > 0$.

Q19 — 6 point(s) — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{u_n^2} > 0\,.$$

Nous en déduisons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante. D'après le théorème de convergence monotone, nous avons l'alternative :

- soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée, auquel cas elle converge vers $\ell := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$;
- soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, auquel cas elle diverge vers $+\infty$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$. Comme ℓ majore la suite, $\ell \geqslant u_0 > 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence vérifiée par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, comme $\ell \neq 0$, il vient par opération sur les limites :

$$\ell = \ell + \frac{1}{\ell^2}$$

d'où une contradiction. Par l'alternative donnée par le théorème de convergence monotone, nous en déduisons que $u_n \to +\infty$.

Q20 — 8 point(s) — En exprimant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1}^3 à l'aide de u_n et en appliquant le théorème de Cesàro, démontrer que $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1}^3 = \left(u_n + \frac{1}{u_n^2}\right)^3 = u_n^3 + 3 + \frac{3}{u_n^3} + \frac{1}{u_n^6}\,.$$

Grâce à **Q19**, nous en déduisons :

$$u_{n+1}^3 - u_n^3 \to 3\,.$$

D'après le théorème de Cesàro :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^3 - u_k^3\right) = \frac{u_n^3 - u_0^3}{n} \to 3\,.$$

Nous en déduisons :

$$\frac{u_n^3}{3n} \to 1$$

et grâce à la continuité en 1 et à la multiplicativité de la fonction racine cubique :

$$\frac{u_n}{\sqrt[3]{3n}} \to 1\,.$$

Nous avons donc démontré $u_n \sim \sqrt[3]{3n}$.

§ 4 Lemme de sous-additivité de Fekete (Mines MP 2018)

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$U_n = \{u_k \,:\, k \geqslant n\}\,.$$

On définit les suites $\underline{u}=(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u}=(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\underline{u}_n = \inf(U_n) \qquad \textit{et} \qquad \overline{u}_n = \sup(U_n)\,.$$

Q21 — 6 point(s) — Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Comme u est bornée, il existe M tel que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |u_n|\leqslant M$. Ainsi, U_n est une partie non vide et bornée (incluse dans $[-M,M]$). Elle admet des bornes supérieure et inférieure et $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont bien définies.
Comme $U_{n+1}\subset U_n$, $\inf(U_n)\leqslant\inf(U_{n+1})\leqslant\sup(U_{n+1})\leqslant\sup(U_n)$. Ainsi $\underline{u}$ croît et $\overline{u}$ décroît.
Ces suites étant bornées (incluses dans $[-M,M]$) elles convergent par théorème de limite monotone.

Q22 — 12 point(s) — Démontrer qu'il existe une suite extraite de $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\lim\overline{u}_n$. Quel théorème redémontre-t-on ainsi ?

- La suite $\left(\overline{u}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et convergente (**Q21**). D'après le théorème de la limite monotone :

$$(\star) \qquad \lim\overline{u}_n = \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\overline{u}_n\,.$$

- D'après $(\star)$, $\lim\overline{u}_n+1$ ne minore pas $\left\{\overline{u}_n \,:\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, donc il existe $N_1\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\lim\overline{u}_n \leqslant \overline{u}_{N_1} = \sup\{u_n \,:\, n\geqslant N_1\} < \lim\overline{u}_n+1\,.$$

Comme $\overline{u}_{N_1}-1$ ne majore pas $\{u_n \,:\, n\geqslant N_1\}$, il existe $n_1\geqslant N_1$ tel que :

$$\lim\overline{u}_n-1 \leqslant \overline{u}_{N_1}-1 < u_{n_1} \leqslant \overline{u}_{N_1} < \lim\overline{u}_n+1$$

d'où $\lim\overline{u}_n-1\leqslant u_{n_1}\leqslant\lim\overline{u}_n+1$.

- D'après $(\star)$, $\lim\overline{u}_n+\dfrac{1}{2}$ ne minore pas $\left\{\overline{u}_n \,:\, n\in\mathbb{N}^*\right\}$, donc il existe $N_2\in\mathbb{N}^*$ tel que :

$$\lim\overline{u}_n \leqslant \overline{u}_{N_2} < \lim\overline{u}_n+\frac{1}{2}\,.$$

Comme la suite $\left(\overline{u}_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, si on pose $N_2' := \max\{N_2, n_1+1\}\geqslant N_2$:

$$\lim\overline{u}_n \leqslant \overline{u}_{N_2'} = \sup\left\{u_n \,:\, n\geqslant N_2'\right\} \leqslant \overline{u}_{N_2} < \lim\overline{u}_n+\frac{1}{2}\,.$$

Comme $\overline{u}_{N'_2} - \dfrac{1}{2}$ ne majore pas $\{u_n \ : \ n \geqslant N'_2\}$, il existe $n_2 \geqslant N'_2 > n_1$ tel que :

$$\lim \overline{u}_n - \frac{1}{2} \leqslant \overline{u}_{N'_2} - \frac{1}{2} < u_{n_2} \leqslant \overline{u}_{N'_2} < \lim \overline{u}_n + \frac{1}{2}$$

d'où $\lim \overline{u}_n - \dfrac{1}{2} \leqslant u_{n_2} \leqslant \lim \overline{u}_n + \dfrac{1}{2}$.

- Nous avons construit deux entiers naturels $n_1 < n_2$ tels que, pour tout $\ell \in \{1,2\}$:

$$\lim \overline{u}_n - \frac{1}{\ell} \leqslant u_{n_\ell} \leqslant \lim \overline{u}_n + \frac{1}{\ell} .$$

- Soit $k \geqslant 2$ un entier. Supposons construits des entiers naturels $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ tels que, pour tout $\ell \in [\![1,k]\!]$:

$$\lim \overline{u}_n - \frac{1}{\ell} \leqslant u_{n_\ell} \leqslant \lim \overline{u}_n + \frac{1}{\ell} .$$

D'après $(\star)$, $\lim \overline{u}_n + \dfrac{1}{k+1}$ ne minore pas $\{\overline{u}_n \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}$, donc il existe $N_{k+1} \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\lim \overline{u}_n \leqslant \overline{u}_{N_{k+1}} < \lim \overline{u}_n + \frac{1}{k+1} .$$

Comme la suite $(\overline{u}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, si on pose $N'_{k+1} := \max\{N_{k+1}, n_k + 1\} \geqslant N_{k+1}$:

$$\lim \overline{u}_n \leqslant \overline{u}_{N'_{k+1}} = \sup\left\{u_n \ : \ n \geqslant N'_{k+1}\right\} \leqslant \overline{u}_{N_{k+1}} < \lim \overline{u}_n + \frac{1}{k+1} .$$

Comme $\overline{u}_{N'_{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}$ ne majore pas $\{u_n \ : \ n \geqslant N'_{k+1}\}$, il existe $n_{k+1} \geqslant N'_{k+1} > n_k$ tel que :

$$\lim \overline{u}_n - \frac{1}{k+1} \leqslant \overline{u}_{N'_{k+1}} - \frac{1}{k+1} < u_{n_{k+1}} \leqslant \overline{u}_{N'_{k+1}} < \lim \overline{u}_n + \frac{1}{k+1}$$

d'où $\lim \overline{u}_n - \dfrac{1}{k+1} \leqslant u_{n_{k+1}} \leqslant \lim \overline{u}_n + \dfrac{1}{k+1}$.

- Nous construisons ainsi par récurrence une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim \overline{u}_n - \dfrac{1}{k} \leqslant u_{n_k} \leqslant \lim \overline{u}_n + \dfrac{1}{k}$.
- L'application :

$$\varphi \ \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ k & \longmapsto & n_k \end{array} \right.$$

est strictement croissante et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\lim \overline{u}_n - \dfrac{1}{k} \leqslant u_{\varphi(k)} \leqslant \lim \overline{u}_n + \dfrac{1}{k}$. Par le théorème d'encadrement $u_{\varphi(k)} \to \lim \overline{u}_n$.

- Nous redémontrons ainsi le théorème de Bolzano-Weierstrass qui stipule que, de toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Pour toutes suites réelles $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $w = (w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, on dit que v est plus petite que w, et on note $v \preceq w$, si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $v_n \leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est plus grande que v.

Q23 — 6 point(s) — Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

On a $\overline{u}$ qui est décroissante et plus grande que u ($\overline{u}_n = \sup(U_n) \geqslant u_n$ car $u_n \in U_n$).
Soit v une suite ayant ces deux propriétés. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \geqslant n \quad u_k \leqslant v_k \leqslant v_n$$

Par passage au sup (sur k), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{u}_n \leqslant v_n$$

et ainsi $u \preceq v$. On a alors montré que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u.
On a $\underline{u}$ qui est croissante et plus petite que u ($\underline{u}_n = \inf(U_n) \leqslant u_n$ car $u_n \in U_n$).
Soit v une suite ayant ces deux propriétés. On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall k \geqslant n \quad v_n \leqslant v_k \leqslant u_k$$

Par passage à la borne inférieure (sur k), on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \leqslant \underline{u}_n$$

et ainsi $v \preceq u$. On a alors montré que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite, on appelle limite inférieure lim inf *et limite supérieure* lim sup *les limites suivantes :*

$$\liminf u_n = \lim \underline{u}_n \qquad \textit{et} \qquad \limsup u_n = \lim \overline{u}_n\,.$$

Q24 — 4 point(s) — Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.

Si $u \preceq v$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall k \geqslant n,\ u_k \leqslant v_k \leqslant \overline{v}_n$$

et en passant à la borne supérieure (en k)

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \overline{u}_n \leqslant \overline{v}_n$$

Par passage à la limite dans une inégalité large, on a donc $\lim \overline{u} \leqslant \lim \overline{v}$.

Q25 — 8 point(s) — Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

Avec les inégalités de **Q21**, les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes ssi leur différence tend vers 0, c'est-à-dire si elles ont même limite.
Remarquons que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underline{u}_n \leqslant u_n \leqslant \overline{u}_n$$

Si les suites $\overline{u}$ et $\underline{u}$ ont même limite, alors par théorème d'encadrement, la suite u converge et a même limite que $\overline{u}$ et $\underline{u}$.
Réciproquement, supposons que u converge et notons ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$; il existe un rang p tel que

$$\forall k \geqslant p \quad \ell - \varepsilon \leqslant u_k \leqslant \ell + \varepsilon$$

En passant à la borne supérieure ou inférieure pour $k \geqslant n$ (n donné plus grand que p) on a donc

$$\forall n \geqslant p \quad \ell - \varepsilon \leqslant \underline{u}_n \leqslant \overline{u}_n \leqslant \ell + \varepsilon$$

Ainsi, $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont convergentes de limite ℓ.
Donc $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. Dans ce cas, avec ce qui précède

$$\lim u = \lim \overline{u} = \lim \underline{u}$$

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sous-additive si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{i+j} \leqslant u_i + u_j \, .$$

Dans le reste, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

Q26 — 12 point(s) — Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que :

$$u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité :

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \, .$$

On montre par récurrence sur k que la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{kn} \leqslant k u_n$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- *Initialisation* C'est immédiatement vrai si $k = 1$ (on a même égalité).
- *Hérédité* Supposons le résultat vrai à un rang $k \geqslant 1$. Avec la sous-additivité,

$$u_{(k+1)n} = u_{kn+n} = u_{kn} + u_n$$

  et avec le résultat au rang k, $u_{(k+1)n} \leqslant k u_n + u_n = (k+1)u_n$ ce qui prouve le résultat au rang $k+1$.

Ici, on a $m = qn + r$ avec $q \geqslant 2$ (car $m \geqslant 2n$) et $r \in \{0, \dots, n-1\}$. On écrit alors $m = (q-1)n + r + n$ et comme $q - 1 \geqslant 1$, on va pouvoir utiliser le premier résultat. En effet, avec la sous-additivité

$$u_m \leqslant u_{(q-1)n} + u_{n+r} \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{m} &\leqslant \frac{q-1}{m} u_n + \frac{u_{n+r}}{m} \\ &\leqslant \frac{n(q-1)}{m} \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, \dots, u_{2n-1}\}}{m} \end{aligned}$$

On remarque alors que $m-n-r=(q-1)n$ pour conclure que

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m}\cdot\frac{u_n}{n}+\frac{\max\{u_n,u_{n+1},\ldots,u_{2n-1}\}}{m}.$$

Q27 — 8 point(s) — En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée puis que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\limsup\frac{u_m}{m}\leqslant\frac{u_n}{n}$.

La question précédente avec $n=1$ donne (touts les u_k sont positifs et on peut multiplier les inégalités)

$$\forall m\geqslant 2 \quad \frac{u_m}{m}\leqslant\frac{m-1-r}{m}u_1+\frac{u_1}{m}\leqslant 2u_1$$

En particulier, la suite (u_n/n) est majorée. Mais comme u est positive, cette suite (u_n/n) est aussi minorée (par 0). C'est donc une suite bornée.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Notons v_m le terme du membre de droite dans la question précédente. On a

$$\forall m\geqslant 2n \quad \frac{u_m}{m}\leqslant v_m$$

Avec **Q24** (il suffit d'en reprendre la preuve pour voir qu'il n'est pas gênant que l'on ait une suite plus grande que l'autre seulement à partir d'un certain rang) on en déduit que

$$\limsup\frac{u_m}{m}\leqslant\limsup v_m$$

n étant fixé, le terme $\frac{\max\{u_n,u_{n+1},\ldots,u_{2n-1}\}}{m}$ est de limite nulle quand $m\to+\infty$.
Comme $|n-r|\leqslant 2n$, on a $\frac{n+r}{m}\to 0$ quand $m\to+\infty$.
Ainsi, (v_m) est convergente de limite u_n/n. Avec la question **Q25**, $\limsup v_m=u_n/n$.
On a donc finalement

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \limsup\frac{u_m}{m}\leqslant\frac{u_n}{n}.$$

Q28 — 8 point(s) — ´ En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Posons $w_n=u_n/n$ et $\ell=\limsup w_n$. La question précédente donne

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \ell\leqslant w_n$$

On en déduit comme en **Q24** que

$$\ell\leqslant\liminf w_n$$

On a donc

$$\limsup w_n\leqslant\liminf w_n$$

Comme on sait que l'inégalité inverse est toujours vraie (voir **Q21**), on a une égalité. Avec **Q25**, la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.