Devoir Surveillé n°6

Jeudi 15 décembre – 14h15-17h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Questions de cours

Q1 — Énoncer la caractérisation séquentielle de la borne supérieure.

Q2 — Énoncer la définition formelle d'une suite réelle divergeant vers $+\infty$.

Q3 — Donner, pour tout $q \in \mathbb{C}$, le comportement asymptotique de la suite $\left(q^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q4 — Énoncer le théorème de la limite monotone et démontrer le résultat dans la cas où la suite est croissante.

§ 2 Série harmonique

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\,.$$

On se propose de donner un développement asymptotique à deux termes de H_n.

Q5 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_{2n} - H_n \geqslant \dfrac{1}{2}$.

Q6 — Démontrer que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Q7 — Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$.

Q8 — En déduire que $H_n \sim \ln(n)$.

D'après **Q8**, $H_n = \ln(n) + \mathrm{o}\left(\ln(n)\right)$ *(développement asymptotique à 1 terme).*

Q9 — Démontrer que, pour tout $x \in \,]-1,+\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Q10 — En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right) \leqslant \dfrac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = H_n - \ln(n+1)$ et $b_n = H_n - \ln(n)$.

Q11 — Démontrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes et elles ont même limite. On note γ cette dernière (γ est appelée la constante d'Euler).

Q12 — Énoncer les encadrements de γ livrés par le théorème des suites adjacentes.

Q13 — Soit $\varepsilon > 0$. Donner un rang N, exprimé à l'aide de la fonction partie entière, tel que $0 \leqslant \gamma - a_N \leqslant \varepsilon$.

Nous avons établi $H_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}(1)$ (développement asymptotique à 2 termes).

§ 3 Théorème de Cesàro et étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. On lui associe la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$S_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k\,.$$

On se propose de démontrer le théorème suivant, dû à Cesàro.

> Théorème – Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ, alors $S_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Supposons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel ℓ et fixons $\varepsilon>0$.

Q14 — Démontrer qu'il existe $N_1\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\geqslant N_1+1$, $\displaystyle\sum_{k=N_1+1}^{n}|u_k-\ell|\leqslant\frac{n\varepsilon}{2}$.

Q15 — Justifier qu'il existe $N_2\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\geqslant N_2$, $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}|u_k-\ell|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Q16 — En déduire qu'il existe $N_0\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\geqslant N_0$, $|S_n-\ell|\leqslant\varepsilon$.

Q17 — Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle nécessairement convergente ?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0\in\,]0,+\infty[\\ \forall\, n\in\mathbb{N}\quad u_{n+1}=u_n+\dfrac{1}{u_n^2}\,. \end{cases}$$

Q18 — À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n>0$.

Q19 — Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Q20 — En exprimant, pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_{n+1}^3 à l'aide de u_n et en appliquant le théorème de Cesàro, démontrer que $u_n\sim\sqrt[3]{3n}$.

§ 4 Lemme de sous-additivité de Fekete (Mines MP 2018)

Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note :

$$U_n=\{u_k\ :\ k\geqslant n\}\,.$$

On définit les suites $\underline{u}=(\underline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\overline{u}=(\overline{u}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\underline{u}_n=\inf(U_n)\qquad et\qquad \overline{u}_n=\sup(U_n)\,.$$

Q21 — Justifier que $\underline{u}$ et $\overline{u}$ sont bien définies. Montrer qu'elles sont monotones puis qu'elles convergent.

Q22 — Démontrer qu'il existe une suite extraite de $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers $\lim\overline{u}_n$. Quel théorème redémontre-t-on ainsi ?

Pour toutes suites réelles $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $w=(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on dit que v est plus petite que w, et on note $v\preceq w$, si pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $v_n\leqslant w_n$. De façon équivalente, on dit aussi que w est plus grande que v.

Q23 — Montrer que $\overline{u}$ est la plus petite suite (au sens de $\preceq$) qui est décroissante et plus grande que u. Montrer de même que $\underline{u}$ est la plus grande suite (au sens de $\preceq$) qui est croissante et plus petite que u.

Dans toute la suite, on appelle limite inférieure lim inf *et limite supérieure* lim sup *les limites suivantes :*

$$\liminf u_n = \lim \underline{u}_n \qquad \textit{et} \qquad \limsup u_n = \lim \overline{u}_n \, .$$

Q24 — Si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une autre suite réelle bornée plus grande que u, comparer les limites de $\overline{u}$ et $\overline{v}$.

Q25 — Montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont adjacentes si et seulement si u converge. En ce cas, que peut-on dire des limites des trois suites $u, \overline{u}$ et $\underline{u}$?

On dit qu'une suite réelle $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sous-additive si pour tous i, j dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$u_{i+j} \leqslant u_i + u_j \, .$$

Dans le reste, on ne suppose plus que la suite u est bornée, mais on suppose que u est positive et sous-additive.

Q26 — Soient m et n deux entiers naturels non nuls tels que $m \geqslant 2n$. On note q le quotient et r le reste de la division euclidienne de m par n. Montrer que :

$$u_m \leqslant (q-1)u_n + u_{n+r}$$

et en déduire l'inégalité :

$$\frac{u_m}{m} \leqslant \frac{m-n-r}{m} \cdot \frac{u_n}{n} + \frac{\max\{u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{2n-1}\}}{m} \, .$$

Q27 — En déduire que la suite $\left(\frac{u_m}{m}\right)_{m\in\mathbb{N}^*}$ est bornée puis que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\limsup \frac{u_m}{m} \leqslant \frac{u_n}{n}$.

Q28 — En conclure que la suite $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.