Un corrigé du Devoir Surveillé n°5

— 141 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 4 point(s) — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $F_1\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_2\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux primitives de f sur I. Démontrer que F_1 et F_2 diffèrent d'une constante additive sur I.

Cf. C9.26.

Q2 — 4 point(s) — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Cf. C9.27.

Q3 — 4 point(s) — Énoncer la formule d'intégration par parties.

Cf. C9.41.

Q4 — 12 point(s) — Énoncer la description de l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, puis démontrer ce résultat.

Cf. C10.14.

§ 2 Trois calculs de primitives

Q5 — 6 point(s) — Calculer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \operatorname{sh}^6(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la formule du binôme de Newton :

$$\operatorname{sh}^6(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}\, e^{kx}\, e^{(k-6)x} = \frac{1}{64}\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(-1)^{6-k}\, e^{(2k-6)x}$$

d'où :

$$\operatorname{sh}^6(x) = \frac{1}{64}\left(e^{-6x} - 6e^{-4x} + 15e^{-2x} - 20 + 15e^{2x} - 6e^{4x} + e^{6x}\right) = \frac{1}{32}\left(\operatorname{ch}(6x) - 6\operatorname{ch}(4x) + 15\operatorname{ch}(2x) - 20\right).$$

La fonction $\boxed{x \longmapsto \frac{\operatorname{sh}(6x)}{192} - \frac{3\operatorname{sh}(4x)}{64} + \frac{15\operatorname{sh}(x)}{64} - \frac{5x}{16}}$ est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Q6 — 6 point(s) — Calculer une primitive de la fonction $f\colon x \longmapsto \sin(2x)\, e^{-2\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :

$$F\colon x \longmapsto \int_0^x \sin(2t)\, e^{-2\cos(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^x \sin(t)\cos(t)\, e^{-2\cos(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^x (-2)\cos(t)\, e^{-2\cos(t)}\,(-\sin(t))\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. À l'aide du changement de variable $u = \cos(t)$:

$$F(x) = \int_1^{\cos(x)} u\left(-2e^{-2u}\right)\mathrm{d}u\,.$$

Les fonctions :

$$a\colon u \longmapsto u \qquad \text{et}\, b\colon u \longmapsto e^{-2u}$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties :

$$F(x) = \left[u\, e^{-2u}\right]_1^{\cos(x)} - \int_1^{\cos(x)} e^{-2u}\, \mathrm{d}u = \cos(x)\, e^{-2\cos(x)} + \frac{e^{-2\cos(x)}}{2} + \text{constante}\,.$$

La fonction $\boxed{x \longmapsto \left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) e^{-2\cos(x)}}$ est donc une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Q7 — 12 point(s) — Déterminer un polynôme unitaire P_1 de degré 1 à coefficients réels et un polynôme unitaire P_2 de degré 2 à coefficients réels tels que $X^3+1 = P_1 P_2$, puis déterminer un triplet (a,b,c) de nombres réels tel que :

$$\forall x \in]-1,+\infty[\qquad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{P_1(x)} + \frac{bx+c}{P_2(x)}$$

et enfin calculer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $]-1,+\infty[$.

- Comme -1 est racine de X^3+1, il existe des nombres réels a_1 et a_2 tels que :

$$X^3+1 = (X+1)(X^2+aX+b) = X^3 + (a+1)X^2 + (a+b)X + b\,.$$

Pour que l'identité précédente ait lieu, il suffit de choisir a et b tels que $a+1=0$, $a+b=0$ et $b=1$. Nous observons que $a=-1$ et $b=1$ conviennent, de sorte que $\boxed{X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)\,.}$

- Soit $x > -1$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Comme :

$$\frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2-x+1} = \frac{a\left(x^2-x+1\right) + (bx+c)(x+1)}{1+x^3} = \frac{(a+b)x^2 + (-a+b+c)x + (a+c)}{1+x^3}$$

pour que $\dfrac{a}{x+1} + \dfrac{bx+c}{x^2-x+1} = \dfrac{1}{1+x^3}$ il suffit que $a+b=0$, $-a+b+c=0$, $a+c=1$. Nous résolvons alors un système par la méthode du pivot de Gauß.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ -a & + & b & + & c & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ & & 2b & + & c & = & 0 \\ & & -b & + & c & = & 1 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} a & + & b & & & = & 0 \\ & & 2b & + & c & = & 0 \\ & & & & 3c & = & 2 \end{array}\right. \begin{array}{l} \\ \\ L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array}$$

Nous en déduisons que $\boxed{\dfrac{1}{1+x^3} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{-x+2}{x^2-x+1}\right).}$

- Soit $x > -1$. D'après le point précédent :

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\,\frac{2x-4}{x^2-x+1}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x-1}{x^2-x+1} - \frac{3}{x^2-x+1}\right)\right) = \frac{1}{3}\,\frac{1}{x+1} - \frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1}$$

et donc la fonction $\boxed{x \longmapsto \dfrac{\ln(x+1)}{3} - \dfrac{\ln(x^2-x+1)}{6} + \dfrac{\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

§ 3 Un problème de raccordement pour une EDL1 (CCINP)

On considère les deux équations différentielles linéaires suivantes :

$$(E) \qquad 2x\,y' - 3y = \sqrt{x} \qquad \textit{et} \qquad (EH) \qquad 2x\,y' - 3y = 0\,.$$

Q8 — 4 point(s) — Résoudre l'équation (EH) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Comme x ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$:

$$(EH) \iff y' - \frac{3}{2x}\,y = 0\,.$$

Il s'agit donc de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 homogène sur un intervalle.

La fonction $a\colon x \longmapsto -\dfrac{3}{2x}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Comme la fonction :

$$A\colon x \longmapsto -\frac{3}{2}\ln(x) = -\ln\left(x^{3/2}\right)$$

l'ensemble solution de (EH) sur $]0,+\infty[$ est $\boxed{\mathrm{Vect}\left(y_H \;\middle|\; \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-A(x)} = x^{3/2} \end{array}\right).}$

Q9 — 6 point(s) — Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Comme x ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$:

$$(E) \iff y' - \frac{3}{2x}\,y = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,.$$

Il s'agit donc de résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sur un intervalle.

Grâce à la question précédente, nous connaissons une fonction base (y_H) de la droite vectorielle solution de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 associée à (E).

Nous déterminons une solution particulière de (E) sur $]0,+\infty[$ en appliquant la méthode de variation de la constante. Soit donc $k \in \mathscr{C}^1(]0,+\infty[,\mathbb{R})$ et $y := k\,y_H$. La fonction y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$\begin{aligned}
y'(x) - \frac{3}{2x}\,y(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} &\iff k'(x)\,y_H(x) + k(x)\,y_H'(x) - \frac{3}{2x}\,k(x)\,y_H(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&= k'(x)\,y_H(x) + k(x)\underbrace{\left(y_H'(x) - \frac{3}{2x}\,y_H(x)\right)}_{=0} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad [y_H \text{ est solution de } (EH)] \\
&\iff x^{3/2}\,k'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
&\iff k'(x) = \frac{1}{2\,x^2}
\end{aligned}$$

Nous en déduisons que la fonction :

$$y_p\colon x \longmapsto -\frac{1}{2\,x} \times x^{3/2} = -\frac{\sqrt{x}}{2}$$

est solution de (E) sur $]0,+\infty[$. L'ensemble solution de (E) sur $]0,+\infty[$ est donc :

$$\boxed{\left\{ \left| \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & k\,x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2} \end{array} \right. \;:\; k \in \mathbb{R} \right\}.}$$

Q10 — 6 point(s) — L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

Supposons que l'équation (E) possède une solution y sur $[0,+\infty[$. Alors y est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ (en particulier dérivable en 0 à droite) et, pour tout $x \geqslant 0$, $2x\,y'(x) - 3y(x) = \sqrt{x}$.

En spécialisant à $x \leftarrow 0$, il vient $y(0) = 0$.

Puisque $y_{|]0,+\infty[}$ est solution de (E) sur $]0,+\infty[$, nous déduisons de la question précédente l'existence d'une constante réelle k telle que, pour tout $x > 0$, $y(x) = k\,x^{3/2} - \dfrac{\sqrt{x}}{2}$.

Ainsi :

$$y \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x=0\,; \\ k\,x^{3/2}-\dfrac{\sqrt{x}}{2} & \text{si } x>0. \end{cases} \end{array} \right.$$

Comme :

$$\frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \frac{k\,x^{3/2}-\dfrac{\sqrt{x}}{2}-0}{x} = k\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$$

la fonction y n'est pas dérivable en 0 à droite. Contradiction.

Nous déduisons de cette étude que $\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ ne possède pas de solution } y \text{ sur } [0,+\infty[.}}$

§ 4 Intégrales de Wallis et applications

Soit $n\in\mathbb{N}$. On appelle intégrale de Wallis de rang n le nombre réel $w_n := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Q11 — 3 point(s) — Justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n>0$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos^n(t) \end{array} \right.$$

est continue et vérifie, pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f_n(t)\geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, $w_n\geqslant 0$.

Si w_n était nulle, alors la propriété de séparation de l'intégrale entraînerait que, pour tout $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f_n(t)=0$, ce qui n'est pas puisque $f_n(0)=1$. Ainsi $w_n\neq 0$.

Puisque $w_n\geqslant 0$ et $w_n\neq 0$, $\boxed{w_n>0.}$

Q12 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. En effectuant le changement de variable $u=\dfrac{\pi}{2}-t$, il vient :

$$w_n := \int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\pi/2}^{0}(-1)\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2}\cos^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)\mathrm{d}u\,.$$

Puisque, pour tout $u\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-u\right)=\sin(u)$, il vient $\boxed{w_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^n(u)\,\mathrm{d}u.}$

Q13 — 8 point(s) — Exprimer, pour tout $n\in\mathbb{N}$, w_{n+2} en fonction de w_n.

Soit $n\in\mathbb{N}$. Les fonctions :

$$u:\ t\longleftarrow \sin(t) \qquad \text{et} \qquad v:\ t\longleftarrow \cos^{n+1}(t)$$

sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Par intégration par parties :

$$w_{n+2} := \int_0^{\pi/2}\cos(t)\cos^{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = \underbrace{\left[\sin(t)\cos^{n+1}(t)\right]_0^{\pi/2}}_{=0} + (n+1)\int_0^{\pi/2}\sin^2(t)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

D'après la relation de Pythagore :

$$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2(t)\right)\cos^n(t)\,\mathrm{d}t = (n+1)\,(w_n-w_{n+2})\,.$$

Nous en déduisons $\boxed{w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, w_n.}$

Q14 — 8 point(s) — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déduire de **Q13** une expression de w_n sous forme de produit, en discutant suivant la parité de n.

- Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(p)$ l'assertion $w_{2p} = w_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k}$. Nous raisonnons par récurrence pour démontrer que $\mathscr{P}(p)$ est vraie, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
  - *Initialisation* D'après la question précédente :
  $$w_2 = w_{0+2} = \frac{1}{2}\, w_0 = w_0 \prod_{k=1}^{1} \frac{2k-1}{2k}$$
  et donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
  - *Hérédité* Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(p)$ est vraie.
  $$\begin{aligned} w_{2(p+1)} &= w_{2p+2} \\ &= \frac{2p+1}{2p+2}\, w_{2p} && [\text{Question précédente}] \\ &= w_0\, \frac{2p+1}{2p+2} \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} && [\text{Hypothèse de récurrence}] \\ &= w_0 \prod_{k=1}^{p+1} \frac{2k-1}{2k}. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:
$$w_{2p} = w_0 \prod_{k=1}^{p} \frac{2k-1}{2k} = w_0\, \frac{\prod_{k=1}^{p} 2k-1}{\prod_{k=1}^{p} 2k} = w_0\, \frac{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k-1\right)\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)}{\left(\prod_{k=1}^{p} 2k\right)^2} = w_0\, \frac{(2p)!}{\left(2^p\, p!\right)^2}$$

Comme $w_0 = \int_0^{\pi/2} 1 \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, il vient :
$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N}^* \quad w_{2p} = \frac{\pi}{2}\, \frac{(2p)!}{2^{2p}\, (p!)^2}.}$$

Notons que cette identité vaut également pour $p = 0$.

- De manière analogue, nous établissons :
$$\boxed{\forall\, p \in \mathbb{N} \quad w_{2p+1} = \frac{2^{2p}\, (p!)^2}{(2p+1)!}.}$$

Q15 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\, w_n\, w_{n-1}$ est constante, en précisant la valeur.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **Q13** :
$$\frac{(n+1)\, w_{n+1}\, w_n}{n\, w_n\, w_{n-1}} = \frac{(n+1)}{n}\, \frac{w_{n+1}}{w_{n-1}} = \frac{(n+1)}{n}\, \frac{n}{n+1} = 1\,.$$

La suite $(n\, w_n\, w_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc constante. Comme $w_0 = \frac{\pi}{2}$ et $w_1 = 1$, il vient :
$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad n\, w_n\, w_{n-1} = \frac{\pi}{2}.}$$

Q16 — 6 point(s) — Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $\dfrac{w_n}{w_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

- Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Comme :

$$0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \cos^n(t) \geqslant 0$$

il vient :

$$0 \leqslant \cos^{n+1}(t) \leqslant \cos^n(t)\,.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient :

$$w_{n+1} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1}(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t = w_n\,.$$

Donc $\boxed{\text{la suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}}$

- Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, à valeurs strictement positives, il vient, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 = \frac{w_{n-1}}{w_{n-1}} \leqslant \frac{w_{n-1}}{w_n} \leqslant \frac{w_{n-1}}{w_{n+1}} = \frac{n+1}{n} \qquad \text{[cf. Q13]}\,.$$

Par théorème d'encadrement, $\boxed{\dfrac{w_n}{w_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

Q17 — 4 point(s) — Déduire de **Q15** et **Q16** que $w_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après **Q15** :

$$w_n^2\,\frac{2n}{\pi} = (n\,w_n\,w_{n-1})\ \frac{2}{\pi}\ \frac{w_n}{w_{n-1}} = \frac{w_n}{w_{n-1}}\,.$$

Grâce à **Q16**, nous en déduisons $w_n^2\,\dfrac{2n}{\pi} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \geqslant 0$ et comme la fonction racine carrée est continue en 1, il vient $\boxed{w_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.}$

Q18 — 8 point(s) — Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4\,k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4\,k^2}\right) = \prod_{k=1}^{n}\frac{4k^2-1}{(2k)^2} = \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k-1)(2k+1)}{(2k)^2} = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k}\right) = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\right)^2 (2n+1)\,.$$

D'après **Q14** :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4\,k^2}\right) = \left(\frac{w_{2n}}{w_0}\right)^2 (2n+1) = w_{2n}^2\,\frac{4}{\pi^2}\,(2n+1) = \left(w_{2n}^2\,\frac{4n}{\pi}\right)\frac{1}{\pi}\,\frac{2n+1}{n} = \left(w_{2n}^2\,\frac{4n}{\pi}\right)\frac{1}{\pi}\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Avec la question précédente, il vient $\boxed{\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{4\,k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}.}$

Q19 — 4 point(s) — Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \displaystyle\int_0^1 (1-u^2)^n\ \mathrm{d}u$ en fonction des intégrales de Wallis.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Avec le changement de variable $u = \sin(t)$ il vient :

$$I_n := \int_0^1 (1-u^2)^n\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \left(1-\sin^2(t)\right)^n \cos(t)\ \mathrm{d}t\,.$$

Grâce à la relation de Pythagore, nous en déduisons $\boxed{I_n = w_{2n+1}.}$

Q20 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $(n, A) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+u^2\right)^n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\arctan(A)} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$.

Soit $(n, A) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$. Avec le changement de variable $u = \tan(t)$ il vient :

$$\int_0^A \frac{1}{\left(1+u^2\right)^n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\mathrm{Arctan}(A)} \frac{1}{\left(1+\tan(t)^2\right)^n}\left(1+\tan^2(t)\right)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\mathrm{Arctan}(A)} \frac{1}{\left(1+\tan(t)^2\right)^{n-1}}\,\mathrm{d}t$$

Comme, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos^2(t) = \dfrac{1}{1+\tan^2(t)}$, nous en déduisons :

$$\boxed{\int_0^A \frac{1}{\left(1+u^2\right)^n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\arctan(A)} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t.}$$

Q21 — 3 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} w_{2n-2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}_+$.

- La fonction :

$$t \longmapsto \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction :

$$X \longmapsto \int_0^X \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$$

est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et donc continue en $\left(\frac{\pi}{2}\right)^-$. Nous en déduisons que :

$$\int_0^X \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[X\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-]{} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t = w_{2n-2}\,.$$

- D'après le cours :

$$\mathrm{Arctan}(A) \xrightarrow[A\to+\infty]{} \left(\frac{\pi}{2}\right)^-\,.$$

- Par composition de limites, il vient :

$$\int_0^{\mathrm{Arctan}(A)} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} w_{2n-2}\,.$$

- Avec la question précédente, nous obtenons finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} w_{2n-2}.}$

Q22 — 8 point(s) — Démontrer que la fonction :

$$\mathrm{erf} \left|\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array}\right.$$

est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$.

- La fonction :

$$t \longmapsto e^{-t^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction erf est son unique primitive nulle en 0. Ainsi, erf est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{erf}'(A) = e^{-A^2} \geqslant 0$. Nous en déduisons que $\boxed{\text{la fonction erf est croissante sur } \mathbb{R}_+.}$

- Soit $A \geqslant 1$. Comme, pour tout $t \geqslant 1$, $t^2 \geqslant t$ et comme exp est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\forall\, t \geqslant 1 \qquad e^{-t^2} \leqslant e^{-t}\,.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_1^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_1^A e^{-t}\,\mathrm{d}t = e^{-1} - e^{-A} \leqslant \frac{1}{e}\,.$$

Ainsi, grâce à la relation de Chasles :

$$\operatorname{erf}(A) = \int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \int_1^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{e}\,.$$

- Soit $A \in [0,1]$ Par croissance de la fonction erf :

$$\operatorname{erf}(A) \leqslant \operatorname{erf}(1) = \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{e}\,.$$

- Des deux points précédents, nous déduisons que :

$$\forall\, A \in \mathbb{R}_+ \quad \operatorname{erf}(A) \leqslant \int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{e}\,.$$

$\boxed{\text{La fonction erf est donc majorée par } \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{e} \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

D'après le théorème de la limite monotone, $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} \int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *existe et est finie. On note* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *la valeur de cette limite.*

Q23 — 3 point(s) — Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$ et que, pour tout $t \in [0,+\infty[$, $e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

- D'après le cours :

$$(\star) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geqslant x + 1\,.$$

- Soit $t \in [0,1]$. En spécialisant $(\star)$ à $x \leftarrow -t^2$, il vient $\boxed{e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2.}$
- Soit $t \in [0,+\infty[$. En spécialisant $(\star)$ à $x \leftarrow t^2$, il vient $e^{t^2} \geqslant 1 + t^2 > 0$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_{>0}$, nous en déduisons $\boxed{e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}.}$

Q24 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \geqslant \sqrt{n}$, $\sqrt{n}\, w_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $A \geqslant \sqrt{n}$. D'après **Q19** :

$$I_n := \int_0^1 \left(1-u^2\right)^n \mathrm{d}u = w_{2n+1}\,.$$

D'après **Q23**, pour tout $u \in [0,1]$, $0 \leqslant 1 - u^2 \leqslant e^{-u^2}$. Par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\forall\, u \in [0,1] \quad \left(1-u^2\right)^n \leqslant e^{-nu^2}\,.$$

Par croissance de l'intégrale, nous en déduisons :

$$w_{2n+1} = \int_0^1 \left(1-u^2\right)^n \mathrm{d}u \leqslant \int_0^1 e^{-nu^2}\,\mathrm{d}u \underset{t=\sqrt{n}\,u}{=} \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Nous en déduisons que $\sqrt{n}\, w_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ puis que :

$$\boxed{\sqrt{n}\, w_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t}$$

grâce à la croissance de la fonction erf sur $\mathbb{R}_+$.

Q25 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $(n, A) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}\,A} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

Soit $(n, A) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$. D'après **Q23** :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}\,.$$

Par croissance de la fonction $x \longmapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$, il vient :

$$\forall\, u \in \mathbb{R}_+ \qquad 0 \leqslant e^{-nt^2} \leqslant \frac{1}{(1+t^2)^n}\,.$$

Par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^A e^{-nt^2}\,\mathrm{d}t \underset{u=\sqrt{n}\,t}{=} \frac{1}{\sqrt{n}}\int_0^{\sqrt{n}\,A} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u\,.$$

Nous en déduisons $\boxed{\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}\,A} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\int_0^A \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t\,.}$

Q26 — 4 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant tendre A vers $+\infty$, dans les inégalités établies en **Q24** et **Q25**, on obtient grâce à **Q21** :

$$\sqrt{n}\,w_{2n+1} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,w_{2n-2}\,.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sqrt{n}\,w_{2n+1} = \left(w_{2n+1}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}}\right)\sqrt{\frac{n}{2(2n+1)}}\,\sqrt{\pi} = \left(w_{2n+1}\sqrt{\frac{2(2n+1)}{\pi}}\right)\sqrt{\frac{1}{4+\dfrac{2}{n}}}\,\sqrt{\pi}\,.$$

De **Q17** et de la continuité de la fonction racine carrée en $\dfrac{1}{4}$ nous déduisons :

$$(\star) \qquad \sqrt{n}\,w_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

- De manière analogue, on établit :

$$(\star\star) \qquad \sqrt{n}\,w_{2n-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,.$$

- En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'encadrement énoncé dans la question, les résultats $(\star)$ et $(\star\star)$ livrent $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.}$