Devoir Surveillé n°5

Jeudi 1er décembre – 14h15-17h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 Questions de cours

Q1 — Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $F_1 : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $F_2 : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux primitives de f sur I. Démontrer que F_1 et F_2 diffèrent d'une constante additive sur I.

Q2 — Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.

Q3 — Énoncer la formule d'intégration par parties.

Q4 — Énoncer la description de l'ensemble solution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, puis démontrer ce résultat.

§ 2 Trois calculs de primitives

Q5 — Calculer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \mathrm{sh}^6(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Q6 — Calculer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \sin(2x)\, e^{-2\cos(x)}$ sur $\mathbb{R}$.

Q7 — Déterminer un polynôme unitaire P_1 de degré 1 à coefficients réels et un polynôme unitaire P_2 de degré 2 à coefficients réels tels que $X^3 + 1 = P_1 P_2$, puis déterminer un triplet (a, b, c) de nombres réels tel que :

$$\forall\, x \in]-1, +\infty[\qquad \frac{1}{1+x^3} = \frac{a}{P_1(x)} + \frac{bx+c}{P_2(x)}$$

et enfin calculer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^3}$ sur $]-1, +\infty[$.

§ 3 Un problème de raccordement pour une EDL1 (CCINP)

On considère les deux équations différentielles linéaires suivantes :

$$(E) \qquad 2x\,y' - 3y = \sqrt{x} \qquad\qquad \textit{et} \qquad\qquad (EH) \qquad 2x\,y' - 3y = 0\,.$$

Q8 — Résoudre l'équation (EH) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q9 — Résoudre l'équation (E) sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Q10 — L'équation (E) admet-elle des solutions sur l'intervalle $[0, +\infty[$?

§ 4 Intégrales de Wallis et applications

Soit $n \in \mathbb{N}$. On appelle intégrale de Wallis de rang n le nombre réel $w_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Q11 — Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n > 0$.

Q12 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

Q13 — Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, w_{n+2} en fonction de w_n.

Q14 — Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déduire de **Q13** une expression de w_n sous forme de produit, en discutant suivant la parité de n.

Q15 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\, w_n\, w_{n-1}$ est constante, en précisant la valeur.

Q16 — Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $\dfrac{w_n}{w_{n-1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Q17 — Déduire de **Q15** et **Q16** que $w_n \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Q18 — Démontrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{4\,k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{\pi}$.

Q19 — Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n := \int_0^1 \left(1-u^2\right)^n \mathrm{d}u$ en fonction des intégrales de Wallis.

Q20 — Démontrer que, pour tout $(n, A) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+u^2\right)^n}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\arctan(A)} \cos^{2n-2}(t)\,\mathrm{d}t$.

Q21 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[A\to+\infty]{} w_{2n-2}$.

Q22 — Démontrer que la fonction :

$$\mathrm{erf} \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \displaystyle\int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de la limite monotone, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *existe et est finie. On note* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ *la valeur de cette limite.*

Q23 — Justifier que, pour tout $t \in [0,1]$, $e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$ et que, pour tout $t \in [0, +\infty[$, $e^{-t^2} \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Q24 — Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $A \geqslant \sqrt{n}$, $\displaystyle\sqrt{n}\, w_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^A e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Q25 — Démontrer que, pour tout $(n, A) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}\,A} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n} \int_0^A \frac{1}{\left(1+t^2\right)^n}\,\mathrm{d}t$.

Q26 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant tendre A vers $+\infty$, dans les inégalités établies en **Q24** et **Q25**, on obtient grâce à **Q21** :

$$\sqrt{n}\, w_{2n+1} \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\, w_{2n-2}\,.$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.