Un corrigé du Devoir Surveillé n°4

— 112 points —

§ 1 Questions de cours

Q1 — 3 point(s) — Énoncer la définition de la partie entière d'un réel.

Cf. C7.68.

Q2 — 4 point(s) — Énoncer le théorème de la bijection.

Cf. C8.74

Q3 — 4 point(s) — Énoncer le critère de dérivabilité d'une fonction réciproque, ainsi que la formule pour la dérivée d'une fonction réciproque en un point où elle est dérivable.

Cf. C8.75

Q4 — 3 point(s) — Énoncer la définition de la fonction Arctangente.

C8.76 et C8.168

Q5 — 5 point(s) — Démontrer que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

C8.76 et C8.169

Q6 — 6 point(s) — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\,\frac{\pi}{2}$.

C8.76 et C8.170

§ 2 Autour de la fonction Arcsinus

Q7 — 3 point(s) — Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}\right)$.

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction Arcsin est définie sur $[-1,1]$. Si $x \in \mathbb{R}$, comme $2\left(1+x^2\right) \geqslant 0$, on a :

$$
\begin{aligned}
f(x) \text{ existe} &\iff -1 \leqslant \frac{1+x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}} \leqslant 1 \\
&\iff \left|\frac{1+x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}\right| \leqslant 1 \\
&\iff |1+x| \leqslant \left|\sqrt{2\left(1+x^2\right)}\right| \\
&\iff (1+x)^2 \leqslant 2\left(1+x^2\right) \qquad \text{[la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+\text{]} \\
&\iff 0 \leqslant (x-1)^2
\end{aligned}
$$

Comme $(x-1)^2 \geqslant 0$ est vrai, nous en déduisons que $\boxed{f \text{ est définie sur } \mathbb{R}}$.

Q8 — 8 point(s) — Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 1[\,\cup\,]1, +\infty[$, puis calculer f'.

La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_{>0}$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $2\left(1+x^2\right) \geqslant 2 > 0$, le résultat sur la composée de deux fonctions dérivables livre la dérivabilité de la fonction :

$$f_1 \colon x \longmapsto \sqrt{2\left(1+x^2\right)}$$

sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
La fonction :

$$f_2 \colon x \longmapsto x+1$$

est affine donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
Comme, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f_1(x) \neq 0$, nous pouvons appliquer le résultat sur le quotient de deux fonctions dérivables, pour obtenir que la fonction :

$$x \longmapsto \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
La fonction Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$. En reprenant l'étude faite en Q7, en remplaçant toutes les inégalités larges par des inégalités strictes, on établit que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\dfrac{f_2(x)}{f_1(x)} \in]-1,1[$. Du résultat sur la composée de deux fonctions dérivables, nous déduisons que :

$$\boxed{\text{la fonction } f = \mathrm{Arcsin} \circ \frac{f_2}{f_1} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \setminus \{1\}.}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 \times \sqrt{2\left(1+x^2\right)} - (1+x) \times \dfrac{4x}{2\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}}{2\left(1+x^2\right)} \times \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1+x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}\right)^2}} \\
&= \frac{\dfrac{2\left(1+x^2\right) - 2x(1+x)}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}}{2\left(1+x^2\right)} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{2\left(1+x^2\right)-(1+x)^2}{2\left(1+x^2\right)}}} \\
&= \frac{2-2x}{2\left(1+x^2\right)} \times \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+1}} \\
&= \frac{1-x}{|1-x|} \times \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{f'(x) = \mathrm{sgn}(1-x) \times \frac{1}{1+x^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-1}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}}$$

Q9 — 6 point(s) — Simplifier l'expression de f sur $]-\infty,1[$ et sur $]1,+\infty[$.

- Sur l'intervalle $]-\infty,1[$, la fonction $f - \mathrm{Arctan}$ a une dérivée nulle et est donc constant. Ainsi, il existe une constante réelle C telle que :

$$\forall x \in]-\infty, 1[\quad f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + C.$$

En évaluant en $-1 \in]-\infty, 1[$, il vient $C = \frac{\pi}{4}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]-\infty, 1[,\ f(x) = \operatorname{Arctan}(x) + \frac{\pi}{4}}$.

- Sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la fonction $f + \operatorname{Arctan}$ a une dérivée nulle et est donc constant. Ainsi, il existe une constante réelle D telle que :

$$(\star) \qquad \forall x \in]1, +\infty[\quad f(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + D.$$

Comme la fonction f est continue en 1, elle est continue en 1 à droite, d'où :

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} f(1)\,.$$

De $(\star)$ et de la continuité de Arctan en 1 à droite, nous déduisons :

$$f(x) \xrightarrow[x \to 1^+]{} -\frac{\pi}{4} + D$$

Comme $f(1) = \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2}$, il vient $-\frac{\pi}{4} + D = \frac{\pi}{2}$. Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in]1, +\infty[,\ f(x) = -\operatorname{Arctan}(x) + \frac{3\pi}{4}}$.

§ 3 Convergence uniforme d'une suite de fonctions

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \end{array} \right. \qquad\qquad g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} - f_n(x)\,. \end{array} \right.$$

Q10 — 5 point(s) — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ_n la restriction de la fonction f_n à l'intervalle $[0, n]$ et $\mathscr{C}_{\varphi_n}$ la courbe représentative de φ_n dans un repère orthonormé du plan. Étudier les variations de la fonction φ_n sur $[0, n]$ et donner les équations réduites des demi-tangentes à $\mathscr{C}_{\varphi_n}$ aux points d'abscisses 0 et n.

- La fonction φ_n est définie par :

$$\varphi_n \left| \begin{array}{ccc} [0, n] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n\,. \end{array} \right.$$

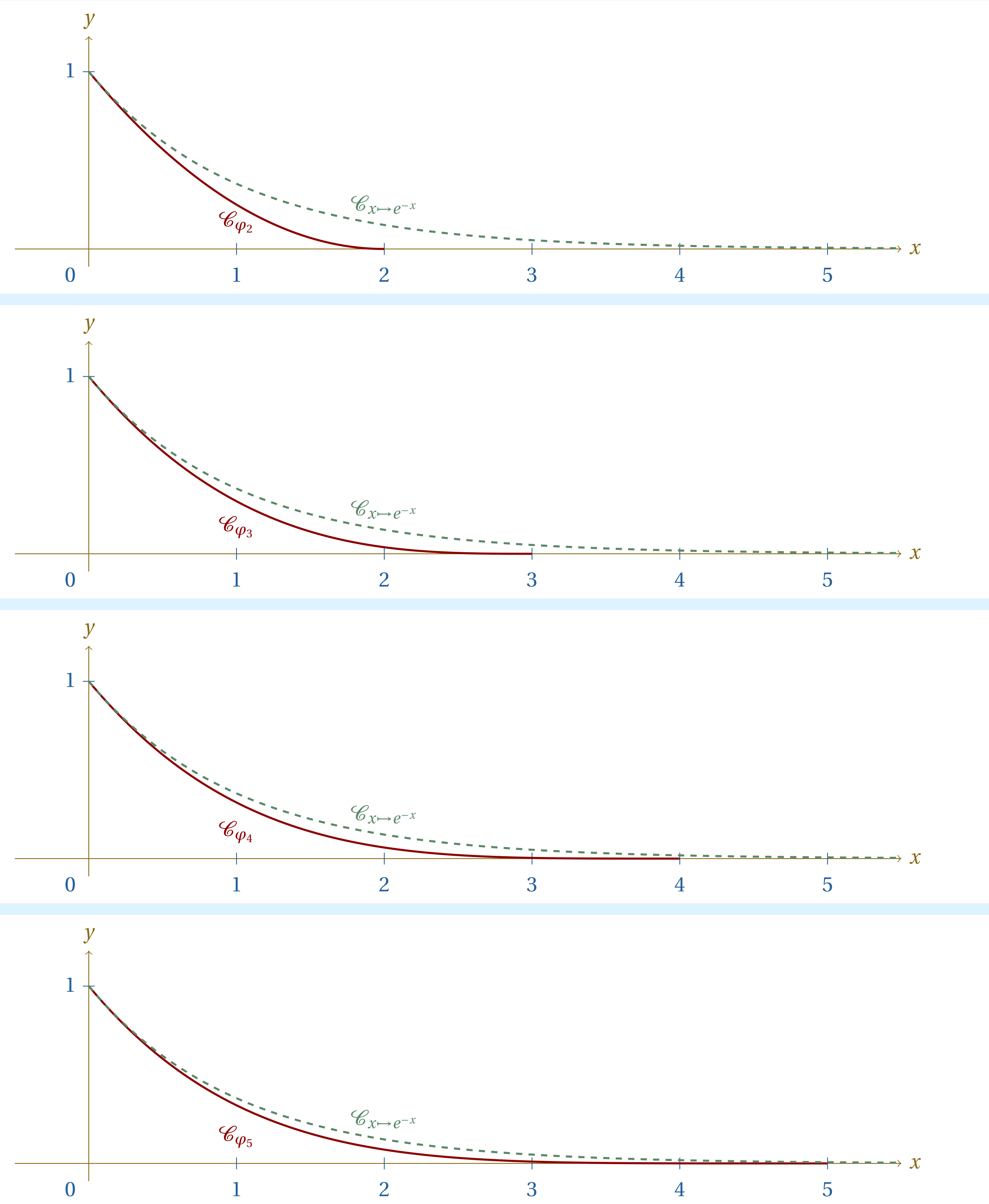
Elle est polynomiale donc (infiniment) dérivable. Nous calculons, pour tout $x \in [0, n]$:

$$\varphi_n'(x) = n \times \left(-\frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} = -\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1}\,.$$

Si $n = 1$ alors φ_n' est constante égale à -1, donc φ_n est strictement décroissante sur $[0, n]$.
Si $n \geqslant 2$, alors φ_n' est strictement négative sur $[0, n[$ et nulle au seul point n, donc φ_n est strictement décroissante sur $[0, n]$.
Dans tous les cas, $\boxed{\varphi_n \text{ est strictement décroissante sur } [0, n]}$.

- Dans le cas où $n = 1$, la fonction φ_n est affine et donc les demi-tangentes à $\mathscr{C}_{\varphi_n}$ aux points d'abscisses 0 et n se confondent avec la courbe $\mathscr{C}_{\varphi_n}$.
Supposons désormais $n \geqslant 2$.
  — $\boxed{\text{L'équation de la demi-tangente à } \mathscr{C}_{\varphi_n} \text{ au point d'abscisse 0 est } y = 1 - x \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant n.}$
  — $\boxed{\text{L'équation de la demi-tangente à } \mathscr{C}_{\varphi_n} \text{ au point d'abscisse } n \text{ est } y = 0 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant n.}$

Q11 — 2 point(s) — Tracer l'allure des courbes $\mathscr{C}_{\varphi_2}, \mathscr{C}_{\varphi_3}, \mathscr{C}_{\varphi_4}, \mathscr{C}_{\varphi_5}$.



Q12 — 4 point(s) — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (]-1,0[\cup]0,+\infty[)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que $\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable au point 0, avec comme nombre dérivé 1 en 0. Ainsi :

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x)-\ln(1+0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1\,.$$

Par composition de limites, $\boxed{\dfrac{\ln(1+u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\,.}$

Q13 — 6 point(s) — Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier qu'il existe $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_x > x$, puis démontrer que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$.

- L'existence de $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_x > x$ est assurée par la propriété d'Archimède.
- Si $x = 0$ alors $f_n(x) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 = e^{-0}$.
- Supposons désormais $x > 0$. Alors pour tout $n \geqslant n_x$, $0 < x < n$. Comme $1 - \dfrac{x}{n} > 0$:

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(-x \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}\right)$$

Comme $u_n := -\dfrac{x}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, Q12 livre :

$$\frac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1\,.$$

Comme exp est continue en $-x$, il vient :

$$f_n(x) = \exp\left(-x \frac{\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)}{-\frac{x}{n}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}\,.$$

- Dans tous les cas, $\boxed{f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}.}$

On fixe, pour toute la suite de cet exercice, un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

Q14 — 4 point(s) — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) \geqslant 0$.

- Si $x \geqslant n$, alors $g_n(x) = e^{-x} \geqslant 0$.
- Supposons $0 \leqslant x < n$. Alors $\dfrac{x}{n} > -1$ et :

$$g_n(x) = e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x} - \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)\,.$$

D'après l'inégalité de concavité de ln :

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leqslant -\frac{x}{n}\,.$$

Comme $n \geqslant 0$ et exp est croissante sur $\mathbb{R}$:

$$\exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right) \leqslant \exp\left(n \times \left(-\frac{x}{n}\right)\right) = e^{-x}\,.$$

Ainsi $g_n(x) \geqslant 0$.

- Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ g_n(x) \geqslant 0.}$

Q15 — 4 point(s) — Soit h la fonction définie par :

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\,e^{-x}\,. \end{array} \right.$$

Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$, puis déterminer ses limites éventuelles en $-\infty$ et en $+\infty$.

- La fonction h est le quotient des fonctions $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto e^x \neq 0$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ par quotient de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^{-x} + x \times (-1) \times e^{-x} = e^{-x}(1-x) \begin{cases} >0 & \text{si } x<1\,; \\ =0 & \text{si } x=1\,; \\ <0 & \text{si } x>1\,. \end{cases}$$

Nous en déduisons que $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]-\infty,1] \text{ et strictement décroissante sur } [1,+\infty[.}$

- Avec les limites usuelles et les opérations sur les limites :

$$\boxed{h(x) = xe^{-x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty}$$

et, à l'aide des croissances comparées :

$$\boxed{h(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0\,.}$$

Q16 — 2 point(s) — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x\,e^{-x} \leqslant \dfrac{1}{e}$.

- D'après la croissance de h sur $[0,1]$ (Q15), pour tout $x \in [0,1]$, $h(x) \leqslant h(1) = \dfrac{1}{e}$.
- D'après la décroissance de h sur $[1,+\infty[$ (Q15), pour tout $x \in [1,+\infty[$, $h(x) \leqslant h(1) = \dfrac{1}{e}$.
- Nous en déduisons que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant h(x) = x\,e^{-x} \leqslant \frac{1}{e}.}$

Q17 — 2 point(s) — On note γ_n la restriction de la fonction g_n à l'intervalle $[0,n]$. Justifier que γ_n est dérivable sur $[0,n]$ et calculer sa fonction dérivée.

- Pour tout $x \in [0,n]$:

$$\gamma_n(x) = e^{-x} - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\,.$$

La fonction γ_n est donc dérivable sur $[0,n]$, comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.

- Soit $x \in [0,n]$. Nous calculons :

$$\gamma_n'(x) = (-1) \times e^{-x} - n \times \left(-\frac{1}{n}\right) \times \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1}\,.$$

Ainsi, $\boxed{\gamma_n'(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-1} - e^{-x}\ .}$

Q18 — 1 point(s) — Que dire des quantités $\left(1-\dfrac{x_n}{n}\right)^{n-1}$ et e^{-x_n} si x_n est un point de $[0,n]$ en lequel la dérivée de γ_n s'annule ?

D'après Q17, $\boxed{\text{si } x_n \in [0,n] \text{ vérifie } \gamma_n'(x_n) = 0 \text{ alors } e^{-x_n} = \left(1-\frac{x_n}{n}\right)^{n-1}.}$

On pourra appliquer (sans le démontrer) le théorème suivant, qui est un raffinement du théorème des bornes atteintes.

Théorème — *Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
(H1) f est continue sur le segment $[a, b]$;
(H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.
Alors :
(C1) f admet un maximum M sur $[a, b]$;
(C2) M est atteint en a, ou en b, ou en un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Q19 — 4 point(s) — Justifier que γ_n possède un maximum M_n sur $[0, n]$, puis démontrer que $M_n \leqslant \max\left\{e^{-n}, \frac{1}{e\,n}\right\} = \frac{1}{e\,n}$.

- La fonction γ_n est continue sur le segment $[0, n]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]0, n[$. D'après le théorème rappelé dans l'énoncé, la fonction $\boxed{\gamma_n \text{ possède un maximum } M_n \text{ sur } [0, n]}$ et ce maximum x_n est atteint en 0 ou en n ou en un point x_n de $]0, n[$ tel que $\gamma_n'(x_n) = 0$.
- Nous calculons $\gamma_n(0) = 0$ et $\gamma_n(n) = e^{-n}$.
- Soit $x_n \in]0, n[$ tel que $\gamma_n'(x_n) = 0$. À l'aide de Q18, nous calculons :

$$\gamma_n(x_n) = e^{-x_n} - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^n = e^{-x_n}\left(1 - \left(1 - \frac{x_n}{n}\right)\right) = \frac{1}{n}\, x_n\, e^{-x_n}\,.$$

Avec Q16, il vient $\gamma_n(x_n) \leqslant \frac{1}{e\,n}$.

- D'après cette étude, $M_n \leqslant \max\left\{0, e^{-n}, \frac{1}{e\,n}\right\} = \max\left\{e^{-n}, \frac{1}{e\,n}\right\}$.
- D'après Q16, $ne^{-n} \leqslant \frac{1}{e}$. Ainsi, comme $n > 0$, $e^{-n} \leqslant \frac{1}{e\,n}$. Nous en déduisons que $\boxed{M_n \leqslant \max\left\{e^{-n}, \frac{1}{e\,n}\right\} = \frac{1}{e\,n}.}$

Q20 — 3 point(s) — En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{e\,n}$.

- Nous savons déjà, d'après Q14, que $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant g_n(x).}$
- Soit $x \in]n, +\infty[$. Comme $g_n(x) = e^{-x}$ et comme $x \longmapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$, $g_n(x) \leqslant e^{-n}$. D'après l'étude réalisé en Q19 :

$$g_n(x) \leqslant \frac{1}{en}\,.$$

- Si $x \in [0, n]$ alors d'après Q19 :

$$g_n(x) = \gamma_n(x) \leqslant \frac{1}{en}\,.$$

- Des deux points précédents nous déduisons que, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ 0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{e\,n}.}$

§ 4 Autour de la fonction Arctangente

Q21 — 3 point(s) — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$.

- Pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(y) > 0$ et donc :

$$\cos(y) = \left|\cos y\right| = \sqrt{\cos^2(y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2(y)}}\,.$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme $\operatorname{Arctan}(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$, nous déduisons du premier point que :

$$\boxed{\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.}$$

Q22 — 3 point(s) — Soit a un réel. Déterminer, en fonction de a, l'ensemble de définition $\mathscr{D}_a$ de la fonction f_a définie par :

$$f_a \colon x \longmapsto \operatorname{Arctan}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

La fonction Arctan est définie sur $\mathbb{R}$. Nous en déduisons que :

$$\boxed{\mathscr{D}_a = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } a = 0\,; \\ \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[\cup \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[& \text{si } a \neq 0\,. \end{cases}}$$

Q23 — 6 point(s) — Justifier que f_a est dérivable sur $\mathscr{D}_a$ et calculer f_a'.

- La fonction rationnelle $x \longmapsto \frac{a+x}{1-ax}$ est dérivable sur $\mathscr{D}_a$ et la fonction Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par les résultats sur les composées de fonctions dérivables, $\boxed{\text{la fonction } f_a \text{ est donc dérivable sur } \mathscr{D}_a.}$
- Soit $x \in \mathscr{D}_a$. Nous calculons :

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{1 \times (1-ax) - (-a) \times (a+x)}{(1-ax)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} \\ &= \frac{1+a^2}{(1-ax)^2} \times \frac{1}{\frac{1 + a^2x^2 + a^2 + x^2}{(1-ax)^2}} \\ &= \frac{1+a^2}{\left(1+a^2\right)\left(1+x^2\right)} \end{aligned}$$

et donc $\boxed{f_a'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$

Q24 — 5 point(s) — Étudier les limites éventuelles de f_a en $-\infty$ et en $+\infty$.

- *Cas où $a = 0$* Alors, pour tout $x \in \mathscr{D}_a = \mathbb{R}$, $f_a(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ et donc :

$$f_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2} \qquad f_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\frac{\pi}{2}.$$

- *Cas où $a \neq 0$* Alors, pour tout $x \in \mathscr{D}_a \cap \mathbb{R}^*$:

$$\frac{a+x}{1-ax} = \frac{x\left(1 + \frac{a}{x}\right)}{-ax\left(1 - \frac{1}{ax}\right)} = \left(-\frac{1}{a}\right) \times \frac{1 + \frac{a}{x}}{1 - \frac{1}{ax}}$$

et donc $\frac{a+x}{1-ax}$ tend vers $-\frac{1}{a}$ lorsque x tend vers $-\infty$ et lorsque x tend vers $+\infty$. Comme la fonction Arctan est impaire et continue en $-\frac{1}{a}$:

$$f_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right) \qquad f_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{a}\right).$$

- Des deux points précédents et de Q6, nous déduisons les résultats suivants.

$$\boxed{f_a(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a=0 \\ \operatorname{Arctan}(a)-\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a>0 \\ \operatorname{Arctan}(a)+\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a<0 \end{cases} \qquad f_a(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } a=0 \\ \operatorname{Arctan}(a)-\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a>0 \\ \operatorname{Arctan}(a)+\dfrac{\pi}{2} & \text{si } a<0 \end{cases}}$$

Q25 — 5 point(s) — Simplifier l'expression de f_a.

- *Cas où $a=0$* Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)$.
- *Cas où $a>0$*
  — La fonction $f_a-\operatorname{Arctan}_{|\mathscr{D}_a}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\left]-\infty,\dfrac{1}{a}\right[$. Ainsi, il existe une constante réelle C telle que :
  $$\forall\, x\in\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[\qquad f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)+C\,.$$
  En analysant la limite en $-\infty$, nous déduisons grâce à Q24 que :
  $$\forall\, x\in\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[\qquad f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)\,.$$
  — La fonction $f_a-\operatorname{Arctan}_{|\mathscr{D}_a}$ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{a},+\infty\right[$. Ainsi, il existe une constante réelle D telle que :
  $$\forall\, x\in\left]\frac{1}{a},+\infty\right[\qquad f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)+D\,.$$
  En analysant la limite en $+\infty$, nous déduisons grâce à Q24 que :
  $$\forall\, x\in\left]\frac{1}{a},+\infty\right[\qquad f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)-\pi\,.$$
- *Cas où $a<0$* En scindant l'étude en deux parties, d'une part sur l'intervalle $\left]-\infty,\dfrac{1}{a}\right[$ et d'autre part sur l'intervalle $\left]\dfrac{1}{a},+\infty\right[$, comme dans le cas où $a>0$, nous obtenons les résultats suivants.
$$\left(\forall\, x\in\left]-\infty,\frac{1}{a}\right[\qquad f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)+\pi\right) \quad \text{et} \quad \left(\forall\, x\in\left]\frac{1}{a},+\infty\right[\qquad f_a(x)=\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)\right)$$
- Synthétisons les résultats obtenus.
$$\boxed{f_a(x)=\begin{cases} \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a) & \text{si} & a=0 & \text{et} & x\in\mathbb{R} \\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a) & \text{si} & a>0 & \text{et} & x<1/a \\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)-\pi & \text{si} & a>0 & \text{et} & x>1/a \\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a)+\pi & \text{si} & a<0 & \text{et} & x<1/a \\ \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(a) & \text{si} & a<0 & \text{et} & x>1/a \end{cases}}$$

Q26 — 2 point(s) — Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $ab\neq 1$. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que :
$$\operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$
si et seulement si $ab<1$.

D'après Q26 :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\begin{cases}\operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b) & \text{si } a=0 \text{ et } b\in\mathbb{R}\\ \operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b) & \text{si } a>0 \text{ et } b<1/a\\ \operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b)-\pi & \text{si } a>0 \text{ et } b>1/a\\ \operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b)+\pi & \text{si } a<0 \text{ et } b<1/a\\ \operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b) & \text{si } a<0 \text{ et } b>1/a\end{cases}$$

et donc :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)=\operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b) \iff (a=0 \text{ et } b\in\mathbb{R}) \text{ ou } (a>0 \text{ et } b<1/a) \text{ ou } (a<0 \text{ et } b>1/a)\ .$$

Nous en déduisons que $\boxed{\operatorname{Arctan}(a)+\operatorname{Arctan}(b)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right) \text{ si et seulement } ab<1\ .}$

Q27 — 5 point(s) — Calculer $\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}(5)+\operatorname{Arctan}(8)$.

- D'après Q6 :

$$\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}(5)+\operatorname{Arctan}(8)=\frac{3\pi}{2}-(\operatorname{Arctan}(1/2)+\operatorname{Arctan}(1/5)+\operatorname{Arctan}(1/8))\ .$$

- Comme $\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{10}<1$, nous déduisons de Q26 que :

$$\operatorname{Arctan}(1/2)+\operatorname{Arctan}(1/5)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}}\right)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{7}{9}\right)\ .$$

- Comme $\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{7}{72}<1$, nous déduisons de Q26 que :

$$\operatorname{Arctan}(7/9)+\operatorname{Arctan}(1/8)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{9}}\right)=\operatorname{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}\ .$$

- D'après trois points précédents $\boxed{\operatorname{Arctan}(2)+\operatorname{Arctan}(5)+\operatorname{Arctan}(8)=\frac{5\pi}{4}\ .}$

Q28 — 4 point(s) — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\operatorname{Arctan}(x-3)+\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(x+3)=\frac{5\pi}{4}$.

- D'après Q27, le nombre 5 est solution de l'équation.
- Les fonctions affines :

$$x\longmapsto x-3 \quad ; \quad x\longmapsto x \quad ; \quad x\longmapsto x+3$$

sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, les fonctions :

$$x\longmapsto \operatorname{Arctan}(x-3) \quad ; \quad x\longmapsto \operatorname{Arctan}(x) \quad ; \quad x\longmapsto \operatorname{Arctan}(x+3)$$

sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction :

$$x\longmapsto \operatorname{Arctan}(x-3)+\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}(x+3)$$

est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc injective. L'équation proposée possède donc au plus une solution.

- Des deux points précédents, nous déduisons que l'équation possède une unique solution, le nombre 5.

Q29 — 4 point(s) — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k}{k+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k-1}{k}\right)$.

- Comme Arctan est impaire :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-k}{k}\right)$$

- Comme :

$$\frac{k}{k+1} \times \frac{1-k}{k} = \frac{1-k}{k+1} \leqslant 0 < 1$$

le résultat de Q26 livre :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1-k}{k}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{\dfrac{k}{k+1} + \dfrac{1-k}{k}}{1 - \dfrac{k}{k+1} \times \dfrac{1-k}{k}}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2\,k^2}\right).$$

- Des deux points précédents, nous déduisons $\boxed{\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k}{k+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{2\,k^2}\right).}$

Q30 — 4 point(s) — Étudier la limite éventuelle de $S_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Nous calculons :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right) && \text{[Q29]} \\
&= \operatorname{Arctan}\left(\frac{n}{n+1}\right) - \operatorname{Arctan}(0) && \text{[somme télescopique]} \\
&= \operatorname{Arctan}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Par continuité de Arctan en 1, il vient $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \operatorname{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}.}$