DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Samedi 19 novembre – 9h15-12h15

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Les assertions seront toutes justifiées avec soin, les raisonnements structurés, les résultats encadrés.

§ 1 QUESTIONS DE COURS

Q1 — Énoncer la définition de la partie entière d'un réel.

Q2 — Énoncer le théorème de la bijection.

Q3 — Énoncer le critère de dérivabilité d'une fonction réciproque, ainsi que la formule pour la dérivée d'une fonction réciproque en un point où elle est dérivable.

Q4 — Énoncer la définition de la fonction Arctangente.

Q5 — Démontrer que Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Q6 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{sgn}(x)\,\frac{\pi}{2}$.

§ 2 AUTOUR DE LA FONCTION ARCSINUS

Q7 — Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1+x}{\sqrt{2\left(1+x^2\right)}}\right)$.

Q8 — Justifier que f est dérivable sur $]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$, puis calculer f'.

Q9 — Simplifier l'expression de f sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

§ 3 CONVERGENCE UNIFORME D'UNE SUITE DE FONCTIONS

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions f_n et g_n par :

$$f_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \end{array} \right. \qquad g_n \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{-x} - f_n(x)\,. \end{array} \right.$$

Q10 — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note φ_n la restriction de la fonction f_n à l'intervalle $[0, n]$ et $\mathscr{C}_{\varphi_n}$ la courbe représentative de φ_n dans un repère orthonormé du plan. Étudier les variations de la fonction φ_n sur $[0, n]$ et donner les équations réduites des demi-tangentes à $\mathscr{C}_{\varphi_n}$ aux points d'abscisses 0 et n.

Q11 — Tracer l'allure des courbes $\mathscr{C}_{\varphi_2}, \mathscr{C}_{\varphi_3}, \mathscr{C}_{\varphi_4}, \mathscr{C}_{\varphi_5}$.

Q12 — Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \in (]-1, 0[\cup]0, +\infty[)^{\mathbb{N}^*}$ telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Démontrer que $\frac{\ln(1+u_n)}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Q13 — Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Justifier qu'il existe $n_x \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_x > x$, puis démontrer que $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x}$.

On fixe, pour toute la suite de cet exercice, un entier naturel n supérieur ou égal à 3.

Q14 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g_n(x) \geqslant 0$.

Q15 — Soit h la fonction définie par :

$$h \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x e^{-x}. \end{array} \right.$$

Étudier les variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$, puis déterminer ses limites éventuelles en $-\infty$ et en $+\infty$.

Q16 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant x e^{-x} \leqslant \frac{1}{e}$.

Q17 — On note γ_n la restriction de la fonction g_n à l'intervalle $[0, n]$. Justifier que γ_n est dérivable sur $[0, n]$ et calculer sa fonction dérivée.

Q18 — Que dire des quantités $\left(1 - \frac{x_n}{n}\right)^{n-1}$ et e^{-x_n} si x_n est un point de $[0, n]$ en lequel la dérivée de γ_n s'annule ?

On pourra appliquer (sans le démontrer) le théorème suivant, qui est un raffinement du théorème des bornes atteintes.

> *Théorème* — *Soient a, b des nombres réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que :*
> *(H1) f est continue sur le segment $[a, b]$;*
> *(H2) f est dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.*
> *Alors :*
> *(C1) f admet un maximum M sur $[a, b]$;*
> *(C2) M est atteint en a, ou en b, ou en un point $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Q19 — Justifier que γ_n possède un maximum M_n sur $[0, n]$, puis démontrer que $M_n \leqslant \max\left\{e^{-n}, \frac{1}{en}\right\} = \frac{1}{en}$.

Q20 — En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \frac{1}{en}$.

§ 4 Autour de la fonction Arctangente

Q21 — Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(\mathrm{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Q22 — Soit a un réel. Déterminer, en fonction de a, l'ensemble de définition $\mathscr{D}_a$ de la fonction f_a définie par :

$$f_a : x \longmapsto \mathrm{Arctan}\left(\frac{a+x}{1-ax}\right).$$

Q23 — Justifier que f_a est dérivable sur $\mathscr{D}_a$ et calculer f_a'.

Q24 — Étudier les limites éventuelles de f_a en $-\infty$ et en $+\infty$.

Q25 — Simplifier l'expression de f_a.

Q26 — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $ab \neq 1$. Démontrer, à l'aide des questions précédentes, que :

$$\mathrm{Arctan}(a) + \mathrm{Arctan}(b) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

si et seulement si $ab < 1$.

Q27 — Calculer $\mathrm{Arctan}(2) + \mathrm{Arctan}(5) + \mathrm{Arctan}(8)$.

Q28 — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{Arctan}(x-3) + \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x+3) = \frac{5\pi}{4}$.

Q29 — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathrm{Arctan}\left(\frac{k}{k+1}\right) - \mathrm{Arctan}\left(\frac{k-1}{k}\right)$.

Q30 — Étudier la limite éventuelle de $S_n := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2k^2}\right)$ lorsque n tend vers $+\infty$.